

Федеральное агентство по образованию  
Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет)

С.К. Жданов, В.А. Курнаев,  
М.К. Романовский, И.В. Цветков

## ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ И ПЛАЗМЕННЫХ УСТАНОВКАХ

Под редакцией В.А. Курнаева

Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии» в качестве  
учебного пособия для студентов высших учебных заведений

Москва 2007

УДК 533.9 (075)

ББК 22.333

О-75

**ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ И ПЛАЗМЕННЫХ УСТАНОВКАХ / С.К. Жданов, В.А. Курнаев, М.К. Романовский, И.В. Цветков; Под ред. В.А. Курнаева. М: МИФИ, 2007. 368 с.**

Учебное пособие содержит изложение основ физики плазмы и процессов, происходящих в приборах и установках, предназначенных для создания и практического применения плазмы, а также сведения об эмиссионных явлениях, используемых при генерации плазмы, сведения об элементах ионной и электронной оптики, о физике основных видов газовых разрядов. В основу пособия положены курсы «Физика плазмы», «Введение в физику плазмы» и «Низкотемпературная плазма», читаемые в МИФИ студентам факультета экспериментальной и теоретической физики, специального факультета физики и факультета автоматизации приборов и установок.

Базовый характер пособия и сочетание в одном пособии сведений о физике плазмы, о физической электронике и о физике газового разряда делает его универсальным и полезным для студентов, будущих инженеров-физиков, и аспирантов, специализирующихся как в физике горячей плазмы, технологии термоядерного синтеза, так и в других областях, связанных с применением плазмы и потоков заряженных частиц в генераторах и в ускорителях частиц в плазменно-технологических установках, в плазменных и ионных движителях и во многих других областях.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент профессор, д.ф.-м.н. В.М.Жданов

ISBN 978-5-7262-0877-0

© Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет), 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.....	6
ВВЕДЕНИЕ .....	8
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ...14	
§ 1. Образование плазмы, ее основные свойства .....	14
§ 2. Дебаевский радиус, дебаевский слой.....	16
§ 3. Идеальность плазмы .....	22
§ 4. Элементарные процессы в плазме.....	24
§ 5. Упругие соударения.....	28
§ 6. Неупругие процессы.....	34
§ 7. Равновесия в плазме.....	47
§ 8. Неравновесность плазменных систем.....	53
§ 9. Процессы релаксации в плазме.....	55
§ 10. Процессы переноса в плазме.....	59
§ 11. Диэлектрическая проницаемость плазмы.....	75
ГЛАВА 2. ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ.....	78
§ 12. Одночастичное рассмотрение.....	78
§ 13. Движение в постоянном и однородном магнитном поле.....	79
§ 14. Движение в сильном медленно меняющемся поле.....	82
Дрейфовое приближение	
§ 15. Движение частицы в однородном магнитном поле.....	84
под действием постоянной силы	
§ 16. Дрейф заряженных частиц вдоль плоскости скачка .....	87
магнитного поля	
§ 17. Важнейшие типы дрейфовых движений частиц в плазме....	90
§ 18. Адиабатические инварианты .....	99
§ 19. Применение адиабатического и дрейфового.....	105
приближений	
§ 20. Явления переноса в замагниченной плазме.....	113

ГЛАВА 3. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ ПЛАЗМЫ.....	128
§ 21. Идеальная одножидкостная гидродинамика плазмы. Условия применимости.....	128
§ 22. Основные уравнения.....	130
§ 23. Магнитное давление.....	133
§ 24. Равновесие плазмы в магнитной гидродинамике.....	136
§ 25. Быстрые процессы .....	142
§ 26. Взаимное проникновение плазмы и магнитного поля.....	145
ГЛАВА 4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ.....	150
§ 27. Дисперсионные уравнения для продольных и поперечных волн малой амплитуды.....	151
§ 28. Метод малых колебаний. Диэлектрическая проницаемость немагнитной плазмы.....	156
§ 29. Поперечные электромагнитные волны в немагнитной плазме.....	165
§ 30. Явление отсечки низкочастотной поперечной волны .....	167
§ 31. Ленгмюровские колебания и волны в плазме. Плазмоны... 169	
§ 32. Ионные ленгмюровские волны. Ионно-звуковые волны в плазме.....	173
§ 33. Бесстолкновительное затухание волн в плазме.....	178
§ 34. Диэлектрические свойства магнитоактивной плазмы .....	181
§ 35. Волны в магнитоактивной плазме .....	187
§ 36. Неустойчивости плазмы .....	193
§ 37. Кинетические неустойчивости плазмы .....	204
ГЛАВА 5. ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА .....	208
§ 38. Аналогия световой и электронной оптики.....	208
§ 39. Электростатические линзы.....	211
§ 40. Магнитные линзы.....	216
§ 41. Отклоняющие и фокусирующие электронно-оптические системы .....	219

ГЛАВА 6. ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА ЭЛЕКТРОННЫХ И ИОННЫХ ПУЧКОВ.....	232
§ 42. Ограничение тока пространственным зарядом в диоде.....	232
§ 43. Предельная плотность тока пучка частиц в пролетном промежутке в вакууме.....	235
ГЛАВА 7. ЭМИССИОННАЯ ЭЛЕКТРОНИКА.....	241
§ 44. Термоэмиссионная электроника.....	241
§ 45. Автоэлектронная эмиссия.....	252
§ 46. Изменение температуры эмиттера при термо- и автоэлектронной эмиссии.....	254
§ 47. Фотоэлектронная эмиссия.....	259
§ 48. Вторичная электронная эмиссия.....	263
ГЛАВА 8. ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД.....	273
§ 49. Электрический ток в газах.....	274
§ 50. Теория электронных лавин.....	278
§ 51. Тлеющий разряд.....	284
§ 52. Дуговые разряды.....	294
§ 53. Искровой и коронный, ВЧ и СВЧ разряды.....	299
§ 54. Магнетронный разряд.....	307
§ 55. Плазменно-пучковый разряд.....	314
ГЛАВА 9. УСТРОЙСТВО И РАБОТА ТОКАМАКА.....	321
§ 56. Принцип действия. Принципиальная схема.....	321
§ 57. Способы нагрева плазмы.....	329
§ 58. Удаление тепла и частиц, подпитка топливом.....	338
§ 59. Реактор ИТЭР.....	351
Список использованной и рекомендуемой литературы.....	359
Приложение.....	362

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание учебного пособия с таким названием вышло в 2000 году небольшим тиражом, который давно разошелся. За это время не только увеличилось число студентов, обучающихся на кафедре физики плазмы МИФИ, но и сама область знаний стала более востребованной. Это связано как с возрождением науки и технологий в нашей стране, так и с заметными событиями в мире. В 2006 году подписано соглашение о сооружении во Франции первого международного экспериментального термоядерного реактора ИТЭР на основе установки токамак, которое подписали страны с населением, составляющим более половины Человечества. В нашей стране, выступившей инициатором этого сотрудничества и многие годы лидировавшей в термоядерных исследованиях, разрабатывается Федеральная целевая программа «Овладение энергией термоядерного синтеза. Создание научно-технологической базы термоядерной энергетики в России на 2009-2015 годы», которая предусматривает создание к середине века в нашей стране промышленной термоядерной электростанции.

Для второго издания книга была существенно переработана. Добавлена глава 9, в которой кратко изложены принципы работы и устройство установок типа токамак, а также описан реактор ИТЭР. Помимо очевидной необходимости знакомства широкого круга студентов МИФИ с устройством базовой установки будущей термоядерной энергетики, эта глава дала возможность на примере токамака осуществить синтез тех представлений о физике плазмы и основных происходящих в них явлениях, которые изложены во всех предшествующих главах. Существенной переработке подверглась и первая глава, в основном это связано со стилем изложения и выделением тех моментов, знание которых в соответствии с опытом чтения курсов по основам физики плазмы в МИФИ представляется наиболее существенным. Осуществлена также модернизация глав 5, 7 и 8, в частности, добавлены схемы широко распространенных в плазменных исследованиях типов анализаторов, описание влияния неоднородности поверхности на термоэлектронную эмиссию и описания широко используемых в настоящее время магнетронного и плазменно-пучкового разрядов.

К сожалению, от нас ушел один из авторов книги профессор Михаил Кириллович Романовский, но заложенный им стиль изложения с ясной физической и по возможности, образной интерпретацией явлений, авторы попытались сохранить.

К книге также добавлено приложение в виде наиболее употребляемых формул и соотношений, без знания которых трудно представить себе инженера-физика, связанного с плазмой и плазменными установками.

За минувшее время существенно пополнилась база литературы по физике плазмы. Прежде всего, следует упомянуть издание под редакцией В.Е.Фортова объемной Энциклопедии низкотемпературной плазмы [36], к вводным томам которой ежегодно добавляются тома, посвященные отдельным разделам физики плазмы и ее применений. В 2006 г. вышла книга А.И.Морозова «Введение в плазмодинамику» [37], начат выпуск учебных пособий в серии «Учебная книга по диагностике плазмы» [38-39], вышли также другие учебные пособия и учебники [41-42]. По проблематике управляемого ядерного синтеза среди новых изданий следует упомянуть [43-44]. Среди недавних зарубежных изданий по тематике данной книги читателю можно рекомендовать [45-47].

Следует выразить большую признательность профессорам В.М. Жданову и В.С. Стрелкову, внимательно прочитавших рукопись и сделавших ряд ценных замечаний, преподавателям кафедры физики плазмы И.В.Визгалову, А.С.Савелову и Г.В.Ходаченко за полезные советы по содержанию главы 8, а также кандидату физ.-мат. наук Анне Голубевой, выполнившей огромный объем работ по оформлению рисунков и подготовке оригинала-макета данного издания.

В.А. Курнаев

## ВВЕДЕНИЕ

Всем известны три агрегатных состояния вещества – твердое, жидкое, газообразное. Плазму часто называют четвертым состоянием вещества – самым высокотемпературным, имея в виду цепочку превращений: твердое тело – жидкость – газ – плазма, имеющую место при повышении температуры (Sir William Crookes, 1879).

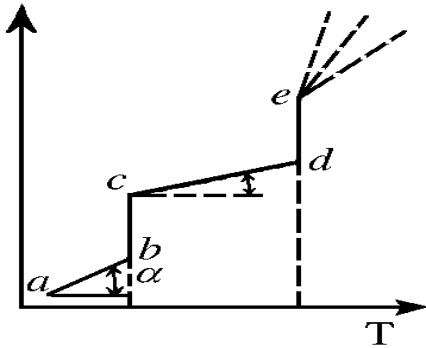


Рис. В.1. Зависимость энергосодержания от температуры

График зависимости количества тепловой энергии, содержащейся в некоторой массе вещества (например, в одном грамме), от его температуры подобен графику, показанному на рис. В.1. При достаточно низкой температуре любое вещество находится в твердом состоянии; по мере повышения температуры его энергосодержание растет – это участок *a-b*. Наклон отрезка прямой *a-b* определяет

теплоемкостью вещества, а соответствующий участок на шкале температур до точки *b* может быть и очень малым (для водорода 13,9 К) и весьма большим (для вольфрама 3643 К). В точке *b* начинается плавление, для чистых веществ температура остается постоянной: энергия затрачивается на разрушение связей, определяющих упорядоченное расположение частиц вещества относительно друг друга. Величина участка *b-c* определяется так называемой "скрытой" теплотой плавления. При дальнейшем повышении температуры на участке *c-d* вещество остается в жидком состоянии, растет энергия движения его молекул. Наклон отрезка прямой *c-d* определяется теплоемкостью вещества в жидком состоянии. В точке *d* начинается кипение, и вещество переходит в газообразное состояние. На отрезке *d-e* температура остается постоянной, энергия расходуется на разрушение связей между молекулами. Величина участка *d-e* определяется так называемой теплотой испарения. Необходимо отметить, что эти рассуждения верны при некотором заданном дав-



лении. На самом деле и над твердым телом всегда имеется некоторое давление насыщенного пара, весьма малое для большинства веществ. Однако над некоторыми веществами оно все же велико (например, у йода при температуре 387 К оно составляет 90 мм рт. ст.).

Приведенные выше рассуждения имеют характер иллюстрации изменения привычных для нас агрегатных состояний вещества в зависимости от температуры. По мере роста температуры увеличивается энергия молекул, уменьшаются связи и после испарения все молекулы становятся свободными. Если продолжать увеличивать энергию этих свободных молекул (например, нагревать газ), то при взаимных столкновениях молекулы начнут распадаться на атомы. Но это уже принципиально новый процесс – часть энергии затрачивается на процесс, качественно меняющий состав газа.

Хорошо известно, что газ представляет собой совокупность свободных частиц – молекул (обычно) или атомов (реже). Эти частицы сталкиваются друг с другом, со стенками сосуда, и в результате столкновений устанавливается вполне определенное распределение частиц по скоростям. При каждой данной температуре основная часть частиц имеет некоторую определенную (наиболее вероятную) скорость, но всегда есть и более медленные частицы и более быстрые. Чем дальше от наиболее вероятной скорости (и в сторону



Рис.В.2. Функция распределения

уменьшения и в сторону увеличения), тем меньше частиц, имеющих такую, далекую от наиболее вероятной, скорость. На рис.В.2 представлено в качестве иллюстрации относительное число частиц  $dn/ndv$ , приходящееся на интервал скорости  $dv$ , в зависимости от величины модуля

скорости  $v$ . Это – известное распределение Максвелла. Наиболее важно то, что при любых температурах всегда имеются быстрые частицы, причем, чем выше температура, тем их больше.

В обычных условиях, например при комнатной температуре, доля таких частиц крайне мала, так что энергия подавляющего чис-

ла частиц недостаточна для того, чтобы разрушить молекулу (или тем более атом), поэтому практически преобладают только так называемые упругие столкновения, в результате которых полная кинетическая энергия обеих сталкивающихся частиц остается неизменной. Это типично для обычного газа, такие столкновения и приводят к установлению максвелловского распределения (по скоростям или энергиям, так как при данной массе частицы ее кинетическая энергия однозначно определяется скоростью:  $E=mv^2/2$ ; предполагается, что газ в целом покоится).

Имеющиеся всегда быстрые частицы разбивают молекулы и даже атомы, но их ничтожно мало, если температура газа не велика. Процесс распада молекул на атомы называют *диссоциацией*, процесс отрыва электрона от атома – *ионизацией*, а атом, потерявший один электрон (или больше), – ионом. При нормальных условиях в 1 см<sup>3</sup> воздуха содержится  $10^3 - 10^5$  ионов, что ничтожно мало по сравнению с числом молекул  $2.7 \cdot 10^{19}$  в каждом кубическом сантиметре. Однако при повышении температуры все больше становится быстрых частиц, все чаще происходят процессы диссоциации и ионизации. В этих процессах часть кинетической энергии частиц затрачивается на внутримолекулярные (или внутриатомные) процессы; поэтому суммарная кинетическая энергия двух сталкивающихся частиц до соударения уже не равна их кинетической энергии после соударения. Такие процессы называют *неупругими*. В обычном газе роль неупругих процессов пренебрежимо мала, но при достаточно высокой температуре они приобретают существенное значение. В результате образуются новые частицы: при диссоциации – атомы, при ионизации – ионы и электроны. Последнее особенно важно. Атомы, как и молекулы, электрически нейтральны, а вот ионы и электроны имеют электрические заряды. Наличие электрических зарядов существенно меняет характер взаимодействия между частицами. Ведь нейтральные частицы взаимодействуют, грубо говоря, только при непосредственном столкновении, подобно упругим бильярдным шарам, так как потенциал поля сил взаимодействия нейтральных частиц быстро убывает на малых расстояниях между частицами, сменяясь на больших расстояниях слабым притяжением между ними (силы Ван-дер-Ваальса). Заряженные частицы создают вокруг себя протяженные электрические поля, значительно медленнее убывающие с расстоянием, а потому и

сила взаимодействия между заряженными частицами (сила Кулона) значительно медленнее убывает с ростом расстояния между частицами. Именно дальнедействующий характер сил между заряженными частицами и приводит к качественно новым - плазменным - эффектам в газе, содержащем свободные заряды. Это качественно новый газ: газ, содержащий в заметном числе заряженные частицы. Такой газ и называют плазмой. Сам термин “плазма” появился в обиходе науки после работ Ленгмюра и Тонкса в 1928 г., и был введен для описания совокупности явлений, сопровождающих электрический разряд в газе. Легко понять, что между газом нейтральных частиц и газом-плазмой нет четкой границы: обычный газ становится плазмой, как только роль взаимодействия заряженных частиц становится, если не определяющей, то существенной для поведения данной субстанции. Очевидно, что эта граница довольно размытая, в отличие от резких фазовых переходов, имеющих место с повышением температуры и сопровождающих превращение твердого тела в жидкость, а затем жидкости в газ. Некоторое равновесное количество заряженных частиц (определяемое формулой Саха) присутствует в газе при любой температуре, например, свободные заряды в пламени обычной свечи. Но вряд ли столь слабоионизованный газ можно назвать плазмой. Вместе с тем, в дальнейшем мы увидим, что типично плазменные процессы наблюдаются в газе-плазме даже тогда, когда ионизованы только доли процента всех частиц. Можно рассуждать и от обратного: “истинная” плазма состоит из свободных ионов и электронов и остается плазмой до тех пор, пока примесь нейтральных частиц не изменит существенно ее свойств. Но возникает вопрос можно ли, например, назвать плазмой нескомпенсированные по заряду пучки ускоренных частиц, широко используемые в физических экспериментах? Можно ли назвать плазмой весьма разреженный межзвездный или межгалактический газ, ионизируемый излучением звезд? Очевидна необходимость количественного критерия, позволяющего определить, является ли данная совокупность заряженных и нейтральных частиц плазмой. Такой критерий можно сформулировать, опираясь на понятия ленгмюровской частоты и дебаевского радиуса (или длины) экранирования. Именно эти фундаментальные в физике плазмы параметры задают минимальные характерные временной и пространственный масштабы поддержания (или спон-

танного нарушения) квазинейтральности плазмы. Опираясь на эти понятия, можно установить, почему плазменные свойства проявляют, на первый взгляд различные среды - электронный газ в металлах, электронно-дырочная "жидкость" полупроводников или, например, разреженный газ космоса.

Эти, а также другие среды, например электролиты, к которым относятся и «рабочие жидкости» живых систем, иногда называют плазмоподобными [3,4]. Это подчеркивает важность характерных для плазмы законов при описании свойств столь большого и важного в практическом применении числа объектов природы. Электронная плазма металлов называется *вырожденной*. Критерием вырождения, как известно, является соотношение между энергией Ферми, возрастающей с ростом концентрации частиц, и тепловой энергией. Если тепловая энергия меньше энергии Ферми, то плазма вырождена и существенны квантовые эффекты. Мы будем иметь дело с *невырожденной* плазмой, т.е. с такой плазмой, в которой концентрация заряженных частиц достаточно мала (или температура достаточно велика). Строго говоря, многие физики вводят дополнительные условия - считают, например, обязательной компонентой плазмы электромагнитное излучение. Последнее бесспорно верно для больших объектов из плотной плазмы, например, звезд. В них излучение "заперто" – излучение может выходить лишь из сравнительно тонких наружных слоев. В большинстве лабораторных устройств плазма оптически тонкая, излучение не заперто - оно свободно проходит через всю плазму.

Подведем итоги. По современным представлениям плазма - частично или полностью ионизованный газ, в котором объемные плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Такое свойство плазмы называют *квазинейтральностью*. Заряженные частицы плазмы взаимодействуют с силой, для которой характерно *дальноедействие*. Это обстоятельство определяет исключительную роль в плазме, помимо парных столкновений отдельных частиц, *коллективных эффектов*, т.е. полей от многих частиц, проявляющихся в нарастании плазменных колебаний, волн и шумов, в свою очередь воздействующих на движение частиц плазмы. Если возбуждается достаточно много коллективных степеней свободы, то колебания плазмы становятся нерегулярными, она переходит в так называемое *турбулентное состояние*. В этих усло-

виях становятся существенными нелинейные эффекты взаимодействия коллективных возбуждений (мод) плазмы. Нелинейные явления могут быть существенны и в регулярных процессах, например, при воздействии на плазму волн конечной амплитуды. Понятно поэтому, что современная физика плазмы – это физика нелинейных явлений. Еще одна особенность этого нового состояния вещества – плазмы – заключается в сильном воздействии на него внешних электрических и магнитных полей, вызывающих появление объемных зарядов и токов. Вместе с тем, существенное разделение зарядов в плазме затруднено в силу ее квазинейтральности: из-за достаточно большой плотности заряженной компоненты в плазме объемный заряд вызывал бы появление слишком больших собственных полей плазмы, чего в действительности не происходит. В определенном смысле квазинейтральность плазмы есть проявление того свойства, что главную роль в плазме играет взаимодействие частиц через *самосогласованные поля*. В этом отношении динамические процессы в плазме являются весьма сложными явлениями. Они требуют изучения не только динамики частиц в заданных внешних полях, но и одновременного учета влияния собственных, согласованных с движением частиц электромагнитных полей, самым существенным образом сказывающихся на движении самих частиц плазмы.

В заключение нелишне подчеркнуть, что плазма во Вселенной и в разнообразных природных процессах и явлениях представлена весьма широко. Межгалактическая, межзвездная и межпланетная плазма, плазма звезд и звездных атмосфер, от Белых Карликов до Красных Гигантов, нейтронных звезд, пульсаров и черных дыр, плазма верхних слоев атмосферы планет и плазма радиационных поясов, плазма грозовых разрядов и газоразрядная плазма лабораторных устройств, “термоядерная” плазма современных термоядерных установок - вот далеко не полный перечень приложений науки о плазме. Наконец, в самые первые мгновения жизни Вселенной после Большого Взрыва, когда родился наш мир, как полагают, вещество также находилось в состоянии горячей плазмы, отголоском которого является реликтовое излучение, состоящее сейчас из “холодных” (с температурой около 2.7 К), а тогда “горячих” квантов, находившихся в равновесии с плазмой чудовищной температуры – в сотни миллионов и миллиардов градусов.

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ

### §1. Образование плазмы, ее основные свойства

Для того, чтобы обычный газ перевести в плазменное состояние, необходимо ионизировать заметную часть молекул или атомов. Процесс ионизации является пороговым. Для ионизации электрон в атоме должен приобрести энергию большую, чем его энергия связи. Передача энергии, достаточной для разрыва этой связи, возможна при соударении атома или молекулы с другой быстрой частицей – электроном, ионом, атомом или молекулой, при взаимодействии с фотоном, при воздействии достаточно сильного электрического поля. При движении быстрого атома в сильном магнитном поле  $B$  возможна лоренц-ионизация.

В системе координат, относительно которой атом неподвижен, на него, согласно преобразованиям Лоренца, действует электрическое поле  $E=(v/c)B$ . Для ионизации атомов в электрическом поле пороговое значение поля составляет  $E\sim 10^9$  В/см, а ионизация из возбужденных состояний возможна при меньших полях  $E\sim 10^6$  В/см.

Если передаваемой атому энергии недостаточно для отрыва электрона, происходит возбуждение атома, которое снимается излучением кванта или передачей энергии другим электронам. В свою очередь, излученные кванты поглощаются другими атомами, либо свободно уходят.

Такую совокупность свободных заряженных и нейтральных частиц и квантов электромагнитного излучения американский физик Ленгмюр в 1928 г. назвал плазмой. Таким образом, плазма – это газ, но газ специфический: в нем могут присутствовать заряженные частицы сильно различающиеся по массе. Например, полностью ионизированная водородная плазма в качестве положительной компоненты содержит ионы водорода, т. е. протоны, а отрицательно заряженной компонентой являются электроны. Как известно, массы этих частиц равны

$$m_p = 1.67 \times 10^{-24} \text{ г}, \quad m_e = 0.91 \times 10^{-27} \text{ г},$$

и для отношения этих масс приближенно имеем  $m_p/m_e = 1840$ .

### Квазинейтральность

Плазма в целом должна быть электрически нейтральна, количество разноименных зарядов в достаточно большой единице ее объема равны. В противном случае возникнут электрические поля, тем большие, чем больше дисбаланс зарядов, а создание таких полей требует совершения работы по разделению зарядов. Очевидно, что при отсутствии внешних воздействий эта работа может производиться только за счет кинетической энергии самих заряженных частиц.

Предположим, что в некотором объеме флуктуативно разошлись заряды (рис.1.1) (считаем, что ионы покоятся, а электроны уходят) и оценим максимальное расстояние такого расхождения.

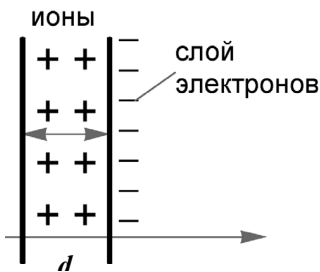


Рис.1.1 Разделение зарядов в плазме

Расходящиеся на расстояние  $x$  заряды создают электрическое поле  $E = 4\pi n e x$ . Здесь  $n$  – концентрация плазмы, а  $e$  – элементарный заряд (равный по величине заряду электрона). Сила со стороны поля, действующая на элементарный заряд, равна  $eE$ ; работа по разделению зарядов на расстояние  $d$  оказывается равной:

$$A = \int_0^d eE dx = \frac{4\pi \cdot e^2 n}{2} d^2,$$

и она не может превышать кинетическую энергию теплового движения частицы, для одномерного движения, как известно, равную  $(1/2) k_B T$ , где  $k_B$  – постоянная Больцмана. Отсюда

$$d = \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi \cdot e^2 n}}. \tag{1.1}$$

На расстояниях, меньших  $d$ , всегда будут возникать электрические поля; флуктуации неизбежны. А вот разойтись на расстояния, существенно большие чем  $d$ , частицы не могут. Поэтому плазма и является *квазинейтральной* – нейтральная в больших объемах, но всегда с электрическими полями на расстояниях масштаба  $d$ , зави-

сящего от температуры и плотности плазмы. Величину  $d$  обычно называют *дебаевским радиусом* (см. ниже), употребительно также обозначение  $r_D$ .

В физике плазмы температуру обычно измеряют в электрон-вольтах, при этом 1эВ эквивалентен 11600 К, и для ее обозначения в энергетических единицах вместо  $k_B T$  используют  $T$ . В книге в соответствии со сложившейся в русскоязычной литературе по плазме используется гауссова система единиц (см. Приложение I). Расчеты по (1.1) для термоядерной плазмы с параметрами  $n \cong 10^{14} \text{см}^{-3}$ ,  $T \cong 10^4 \text{эВ}$  дают  $d \cong 5 \cdot 10^{-3} \text{см}$ .

### ***Плазменная частота***

Электрические поля разделения зарядов будут действовать на заряженные частицы. Полагая, что существенно более тяжелые ионы покоятся, рассмотрим движение некоторого выделенного электрона в таком одномерном поле  $E$  (см. рис. 1.1). Уравнение движения электрона

$$m \ddot{x} = -eE = -4\pi n e^2 x,$$

совпадает по виду с уравнением движения для одномерного осциллятора. Следовательно, электрон будет колебаться с частотой

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi \cdot e^2 n}{m}}. \quad (1.2)$$

Эту частоту, являющуюся одной из важнейших характеристик плазмы, называют *плазменной* или *ленгмюровской*. Следует подчеркнуть, что она не зависит от температуры. Для термоядерной плазмы с приведенными выше параметрами частота ленгмюровских колебаний оказывается равной  $\omega_p \cong 6 \cdot 10^{11} \text{с}^{-1}$ .

## **§ 2. Дебаевский радиус, дебаевский слой**

Каждая заряженная частица в плазме взаимодействует с другими заряженными частицами, и распределение потенциала  $\phi$  её поля зависит от пространственного распределения окружающих её частиц. В поле данной частицы плотность заряженных частиц в



равновесном состоянии плазмы должна быть распределена по закону Больцмана

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{e\varphi}{T}\right), \quad (1.3)$$

где  $n_0$  – концентрация частиц невозмущенной полем плазмы,  $\varphi$  – потенциал электростатического поля. Напишем теперь уравнение Пуассона (в сферической системе координат) для частиц плазмы, окружающих выделенную частицу:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = -4\pi e(Zn_i - n_e).$$

Учтем, что плотности электронов и ионов в поле выделенной частицы подчиняются закону Больцмана, а температуры  $T_e$  и  $T_i$  распределений электронов и ионов плазмы могут быть разными. Ограничиваясь линейным приближением, т.е. считая  $|\varphi| \ll T$ , разложим экспоненты в ряд. Учитывая квазинейтральность плазмы ( $Zn_{oi} = n_{oe}$ ), получим упрощенное выражение для уравнения Пуассона:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = \frac{4\pi Ze(n_e T_e + n_i T_i)}{T_e T_i} \cdot \varphi = \frac{\varphi}{r_{DH}^2}, \quad (1.4)$$

где обозначено

$$r_D = \sqrt{\frac{T_e T_i}{4\pi Z e^2 (T_e n_e + T_i n_i)}} \quad (1.5)$$

радиус Дебая. Решение уравнения (1.3):

$$\varphi = \frac{q}{r} e^{-r/r_D}, \quad (1.6)$$

где  $q$  – заряд выделенной нами “пробной” частицы. Если это заряженный ион с кратностью ионизации  $Z$ , то  $q = Ze$ .

Вблизи частицы на расстояниях  $r \ll r_D$  потенциал поля совпадает с потенциалом поля частицы в вакууме ( $\varphi \approx q/r$ ), а на расстояниях  $r \gg r_D$  поле экспоненциально быстро затухает. На таких расстояниях от частицы плазма экранирует её электрическое поле. Поэтому уравнение (1.6) иногда называют *уравнением экраниров-*

ки. После того, как мы нашли характерное расстояние экранировки зарядов в плазме, можно дать более строгое ее определение: **плазма – это квазинейтральный ансамбль заряженных (и нейтральных) частиц, размеры которого существенно больше радиуса Дебая.**

### Проникновение внешнего электростатического поля в плазму

Поместим в плазму плоский электрод, имеющий потенциал  $\phi$  по отношению к другому плоскому электроду, удаленному от данного на расстояние  $x \gg d$  (рис.1.2). Примем для простоты  $T_e = T_i$  и  $Z=1$ , так что  $n_{oi} = n_{oe} = n_o$ . Тогда уравнение Пуассона для распределения потенциала вблизи электрода будет следующим:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi e(n_i - n_e) = -8\pi e n_o s\hbar \left( \frac{e\phi}{T} \right) \quad (1.7)$$

(Предполагается, что ось  $x$  системы координат перпендикулярна к электроду)

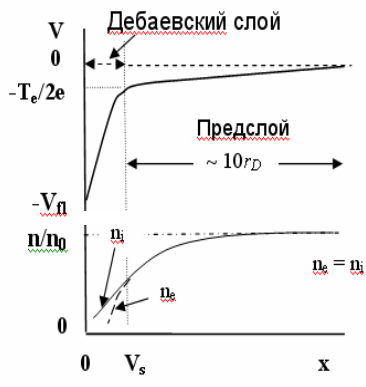


Рис.1.2. Дебаевский слой и пред-слой у поверхности ( $x=0$ )

Решение этого уравнения в предположении, что  $e\phi/T \ll 1$ , имеет следующий вид:

$$E = E_o e^{-x/d},$$

где  $E_o$  – напряженность поля на поверхности пластины, расположенной при  $x=0$  [1]. Мы видим, что напряженность электрического поля, проникающего в плазму, экспоненциально быстро затухает. Характерной величиной расстояния затухания

является радиус Дебая:

$$d = \sqrt{\frac{T}{8\pi e^2}}. \quad (1.8)$$

Вернемся к формуле (1.5). Если в ней положить, что  $n_e = n_i$  и  $T_e = T_i$ , то получим выражение (1.8). Если считать, что плазма явля-

ется сильно неизотермической, так что  $T_e \gg T_i$ , то получим выражение, совпадающее с формулой (1.1) и отличающееся от выражения, определяемого формулой (1.8), всего в  $\sqrt{2}$  раз. Поэтому в любой плазме пространственные масштабы экранирования электрических полей и флуктуативного разделения зарядов практически одинаковы. Так же, как и ленгмюровские колебания с плазменной частотой, экранирование электрических полей – важная характерная особенность плазмы.

Отметим, что по порядку величины  $1/\omega_p$  есть время пролета дебаевского слоя тепловым электроном.

*Плавающий потенциал*, т.е. потенциал, который приобретает внесенное в плазму изолированное тело за счет попадания на него более подвижных электронов, хорошо описывается формулой (в данном случае в связи с принятой практикой потенциал обозначен как  $V \equiv \phi$ ):

$$eV_{fl} = \frac{T_e}{2} \left\{ \ln \left[ \frac{2\pi m_e}{M_i} \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \right] - \frac{1}{2} \right\}. \quad (1.9)$$

Это выражение получается из очевидного условия, что в стационарном случае ток положительных ионов скомпенсирован током электронов. Плотность потока электронов на поверхность определяется в соответствии с (1.3) уменьшенной отрицательным потенциалом тела концентрацией электронов с максвелловским распределением по скоростям:

$$j_e = \frac{1}{4} n_{se} \bar{v}_e \exp \left( - \frac{e(V_{fl} - V_s)}{T_e} \right), \quad (1.10)$$

где  $\bar{v}_e = \frac{8T_e}{\pi m_e}$ , а  $V_s$  – потенциал на границе предслоя. Плотность

тока ионов может быть найдена из *критерия Бома*, согласно которому для образования пристеночного слоя их скорость на границе при  $T_e \gg T_i$  должна определяться условием:

$$v_i > \sqrt{\frac{T_e}{M_i}}. \quad (1.11)$$

В общем случае обобщенный критерий Бома соответствует условию

$$v_i > \sqrt{\frac{T_e + \gamma T_i}{M_i}}, \quad (1.12)$$

где  $\gamma=1$  для изотермического потока,  $\gamma = 5.3$  для адиабатического потока с изотропным давлением и  $\gamma = 3$  для одномерного адиабатического потока. Приравнивая плотности ионного тока  $j_i = (n_{is} v_i) / 4$ , где  $v_i$  определяется по (1.12) при  $\gamma=1$ , и электронного тока (1.7) и, учитывая, что  $eV_s \approx T_e/2$ , получаем (1.9). Изменение этого потенциала с расстоянием качественно показано на рис. 1.2.

Критерий (1.11) может быть получен из следующих соображений. Полагая, что образовавшиеся в области плазмы с потенциалом  $V=0$  ионы имеют нулевую скорость ( $T_i=0$ ), и достигли без столкновений границы предслоя со значением потенциала  $V_s$ , имеем:

$$M_i v_s^2 / 2 = - e V_s. \quad (1.13)$$

Из условия непрерывности потока  $nv$  в пристеночном слое вытекает, что  $n/n_{is} = (V_s/V)^{1/2}$ . Подставляя в уравнение Пуассона для слоя (1.7) и полагая плазму на границе слоя квазинейтральной ( $n_{is} = n_{es} = n_s$ ), имеем

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -4\pi e n_s \left\{ \sqrt{\frac{V_s}{V}} - \exp\left[\frac{e(V - V_s)}{T_e}\right] \right\}.$$

Вводя переменную  $\Delta = V_s - V > 0$  и считая ее малой по сравнению с  $V_s$  и  $T_e/e$ , путем разложения по  $V$  вблизи  $V_s$  правой части получаем:

$$\frac{d^2 \Delta}{dx^2} \approx 4\pi e n_s \left[ \frac{e}{T_e} - \frac{1}{2|V_s|} \right] \Delta.$$

Решение этого уравнения имеет неосциллирующий характер лишь при положительном значении множителя в скобках, откуда  $e/T_e > 1/2V_s$ , что в соответствии с (1.13) дает  $M_i v_s^2 / 2 > T_e$  или  $v_s \geq (T_e/M_i)^{1/2}$ .

Если учесть возможную эмиссию электронов из поверхности с коэффициентом  $\delta < 1$ , то из баланса токов следует, что выражение под знаком логарифма в (1.9) следует разделить на  $(1-\delta)^2$ .

### Ленгмюровский зонд

Введение в плазму металлического зонда позволяет определить ее параметры по *вольт-амперной характеристике* (ВАХ) (рис.1.3). При максвелловском распределении электронов по скоростям и выполнении условия бесстолкновительности такой зонд называют *зондом Ленгмюра*, и это самый распространенный метод измерения параметров плазмы, особенно низкотемпературной при  $T_e \gg T_i$ . Левая часть ВАХ соответствует отрицательному потенциалу на зонде, электроны плазмы заперты этим потенциалом, а ионный ток насыщения при  $|V| \gg T_e/e$  определяется скоростью ионов (1.11) и для цилиндрического зонда связан с температурой и концентрацией плазмы соотношением:

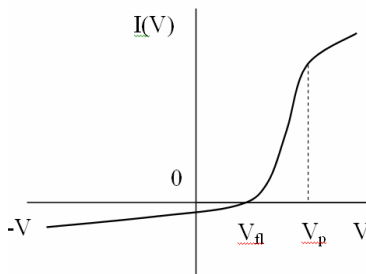


Рис.1.3. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) зонда Ленгмюра

$$i_i \approx 0,56 n_e e \sqrt{\frac{T_e}{M_i}} S_c, \quad (1.14)$$

где  $S_c$  – площадь собирающей поверхности зонда.

Следует иметь в виду, что площадь поверхности, собирающей ускоренные по направлению к зонду ионы, может не совпадать с материальной поверхностью зонда и быть больше ее. В этом случае используют поправочные функции, которые зависят от соотношений между радиусом зонда, радиусом Дебая и между ускоряющим потенциалом и температурой электронов [38].

Ток электронов в тормозящем поле определяется из (1.10). Поэтому в той части ВАХ зонда, где выражение (1.10) применимо, температура плазмы связана с током электронов на зонд  $i_e$  соотношением:

$$T_e = -\frac{e}{\left(\frac{d(\ln i_e)}{dV}\right)}. \quad (1.15)$$

При больших положительных потенциалах на зонде ионный ток отсутствует, и ток на зонд определяется электронным током насыщения. В точке выхода на насыщение ( $U_p$ ) электронного тока его значение позволяет найти концентрацию электронов:

$$n_e = \frac{4i_e(V_p)}{e\bar{v}_e S_3}. \quad (1.16)$$

Таким образом, из зондовой характеристики можно определить концентрацию и электронную температуру плазмы. Следует при этом иметь ввиду, что условие отсутствия экранировки зондом других областей плазмы предполагает, что его размер  $r_3$  должен быть много меньше средней длины свободного пробега частиц в плазме  $\lambda$ , что вместе с условием бесстолкновительности дебаевского слоя соответствует условию  $\lambda \gg r_3 + r_D$ .

### § 3. Идеальность плазмы

По аналогии с газом плазму считают *идеальной*, если средняя кинетическая энергия частиц существенно больше потенциальной энергии их взаимодействия. В газе потенциальная энергия взаимодействия частиц обусловлена силами Ван-дер-Ваальса, в плазме — кулоновским взаимодействием. Энергия кулоновского взаимодействия двух частиц с зарядом  $e$ , находящихся на расстоянии  $R$  друг от друга, равна  $e^2/R$ . Среднее расстояние между частицами при плотности плазмы  $n$  составляет  $R \sim n^{-1/3}$ , а средняя кинетическая энергия частицы по порядку величины равна температуре  $T$ , измеряемой в энергетических единицах.

Таким образом, условие идеальности плазмы можно сформулировать следующим образом:

$$e^2 n^{1/3} \ll T,$$

или

$$\gamma = \frac{e^2 n^{1/3}}{T} \ll 1, \quad (1.17)$$

где  $\gamma$  – параметр неидеальности. Этому условию можно придать и несколько иной смысл. Сечение кулоновского взаимодействия частиц определяется амплитудой рассеяния по порядку величины равной

$$f \sim \frac{e^2}{T}.$$

Очевидно, плазма является идеальной, если амплитуда рассеяния значительно меньше среднего межчастичного расстояния (в противном случае существенны корреляции взаимного расположения частиц)

$$f \ll R \sim n^{-1/3},$$

и мы вновь приходим к критерию (1.6).

Полезно условию идеальности плазмы придать более наглядный смысл, а именно, выделить в объеме плазмы сферу с радиусом равным радиусу Дебая и подсчитать число частиц  $N_D$ , содержащихся в этой сфере:

$$N_D = \frac{4}{3} \pi n r_D^3 \sim \gamma^{-3/2}. \quad (1.18)$$

Сравнив с критерием (1.6), приходим к заключению, что плазма является идеальной, если число частиц в сфере с дебаевским радиусом велико. Часто именно число  $N_D$  используется в качестве меры идеальности или неидеальности плазмы.

Проиллюстрируем полученный результат численным примером. Так, для значений температуры и плотности, типичных для термоядерной плазмы (см. §2), получаем  $N_D \sim 10^3 \gg 1$ , и такая плазма является в высокой степени идеальной. Тогда как для плазмы молнии, типичная температура которой составляет  $\sim 10^4$  К, а концентрация примерно равна концентрации воздуха,  $\sim 10^{19}$  см<sup>-3</sup>, получаем  $N_D \sim 0.1$ . Такая плазма является слабонеидеальной, способной, тем самым, к рождению самоподдерживающихся нелинейных структур. Возможно, как полагают, именно такова природа шаровой молнии, возникающей часто при обычном грозном разряде. Впрочем, детальный механизм этого природного явления пока окончательно не выяснен.

Понятие идеальности применимо и к вырожденной плазме. Однако в этом случае энергию кулоновского взаимодействия частиц сравнивают с энергией Ферми  $E_f$ . Как известно, применимость

классического или же квантового описания частиц и их взаимодействия определяется отношением длины волны де-Бройля  $\lambda_B$  к характерному расстоянию, в качестве которого удобно взять  $n^{-1/3}$ . При  $\lambda_B \ll n^{-1/3}$  мы имеем дело с классическим описанием, при  $\lambda_B \geq n^{-1/3}$  с квантовым. Представляя средний импульс частицы в среде как  $p \sim (mT)^{1/2}$ , для критерия вырождения имеем  $\lambda_B \sim \frac{\hbar}{\sqrt{mT}} \geq n^{-1/3}$  или

$$T \leq \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} \sim E_f. \quad (1.19)$$

Условие идеальности вырожденной плазмы будет соответствовать выполнению соотношения  $e^2 n^{-1/3} \ll (\hbar^2 n^{2/3}) / m_e$  или

$$n \gg \left( \frac{e^2 m_e}{\hbar^2} \right)^3 = \frac{1}{a_B^3}, \quad (1.20)$$

где  $a_B$  – радиус Бора ( $a_B = 0,529 \cdot 10^{-8}$  см). Энергия кулоновского взаимодействия на этом расстоянии в расчете на одну частицу равна  $e^2 / 2a_B \equiv R_Y$  (энергия Ридберга  $R_Y = 13,6$  эВ).

На рис.1.4 в координатах температуры и концентрации показаны области, для которых выполняются приведенные выше соотношения. Там же обозначены области значений  $n$  и  $T$ , характерных для различных плазменных объектов.

#### § 4. Элементарные процессы в плазме

Элементарные процессы – это столкновения атомных частиц (электронов, ионов, атомов, молекул), а также изменение их состояния в результате поглощения или излучения электромагнитного излучения.

Элементарные процессы в плазмы делятся на *прямые* и *обратные*, см. таб. 1.1, в которой смысл процессов проиллюстрирован их упрощенными схемами переходов между уровнями энергии. Первый прямой процесс связан с переходом электрона на возбужденный уровень под действием кванта излучения или при соударении, а обратный с релаксацией этого возбуждения, сопровождающегося испусканием фотона.



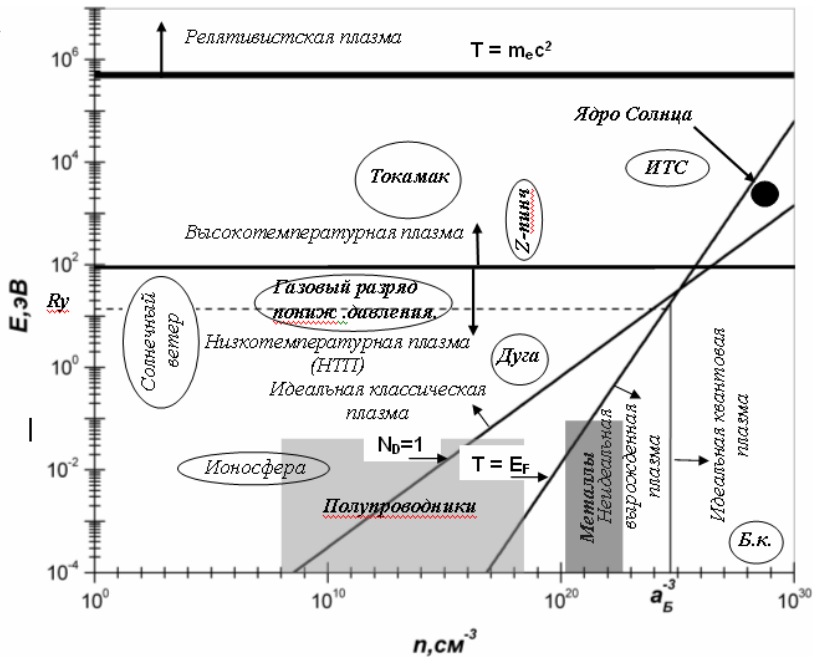








Рис.1.4. Виды плазм.  $N_D=1$  – число частиц в сфере Дебая,  $T=E_F$ , где  $E_F$  – энергия Ферми – критерий вырожденности плазмы. ИТС – инерционный термоядерный синтез, Б.к. – белые карлики

Диссоциация сопровождается переходом электрона на анитисвязанное состояние атомов в молекуле, а третий процесс – это переход электрона в область непрерывного спектра положительных энергий, обратный ему процесс сопровождается высвечиванием кванта или передачей энергии другому электрону в оже-процессе.

Столкновения бывают *парные*, *тройные* или *многочастичные*. Парные соударения преобладают в разреженной плазме, когда когда влиянием окружающих частиц на соударение между двумя частицами можно пренебречь. Вероятность тройных соударений растет  $\sim n^3$ , поэтому они могут играть роль в более плотной плазме, а многочастичные соударения могут происходить, например, при взаимодействии частиц плазмы с конденсированной средой (твёрдым телом или жидкостью).

Таблица 1.1.

	<i>прямые</i>		<i>обратные</i>	
	возбуждение	$\longleftrightarrow$	тушение	
	диссоциация	$\longleftrightarrow$	ассоциация	
	ионизация	$\longleftrightarrow$	рекомбинация	

Столкновения частиц делят на *упругие*, которые происходят без изменения внутренней энергии или состояния сталкивающихся частиц, и *неупругие*, приводящие к такому изменению. Первые отвечают за распределение частиц в плазме по энергии, а вторые за распределение частиц по внутренним степеням свободы или по их сортам. Среди неупругих соударений могут быть и такие, которые происходят без (или почти без) изменения внутренней энергии частиц. Такие соударения называют *резонансными* или *квазирезонансными*.

В общем случае оценку вероятности процесса возбуждения электронов атома, молекулы или иона можно получить, сравнивая время взаимодействия частиц и время соответствующего перехода. Атомные частицы взаимодействуют своими электронными оболочками, и если сближение происходит медленно (т.е. относительные скорости атомных частиц малы по сравнению со скоростью электронов в атоме), то их электронные оболочки успевают постепенно перестроиться, а затем вернуться в исходное состояние. Если же время взаимодействия мало, то электроны за время  $t_s$  "перебрасываются" на новый уровень, происходит возбуждение. Таким образом, возбуждение не происходит, если  $t_{am} \gg t_s$ . По порядку величины  $t_{am} = a/v$ , где  $a$  – размер атома, а  $v$  – относительная скорость. Порядком величины  $t_s$  можно определить из принципа неопределенности:

$$t_s = \hbar / \delta E,$$

где  $\delta E$  – разность энергий уровней. Поэтому получаем условие

$$a/v \gg \hbar/\delta E$$

или

$$a\delta E/v\hbar \gg 1, \quad (1.21)$$

что и является критерием маловероятности перехода и называется *адиабатическим критерием Мессии*. Очевидно, что если разность энергий уровней  $\delta E$  мала, то процесс более вероятен, что и соответствует резонансному процессу.

Иногда соударения делят по отношению взаимной скорости сталкивающихся частиц к скорости электрона на первой боровской орбите:

$$v_B = e^2/\hbar = 2,2 \cdot 10^8 \text{ см/с}. \quad (1.22)$$

При  $v \ll v_B$  столкновения медленные, при  $v \geq v_B$  столкновения быстрые.

Вероятность соударения частиц определяют их *сечением взаимодействия*  $\sigma$ . Для упругих столкновений медленных атомов или молекул, в первом приближении сечения имеют порядок квадрата поперечного размера частиц, например, как известно, размер атома водорода определяется радиусом Бора  $a_B=0.529 \cdot 10^{-8}$  см, так что сечения упругих столкновений составляют  $\sigma_{\text{упр}} \sim 10^{-16}$  см<sup>2</sup>. Для соударений, при которых происходят ядерные реакции, например, реакции синтеза легких элементов сечение определяется характерным размером ядра ( $\sim 10^{-12}$  см<sup>2</sup>), поэтому сечения ядерных соударений измеряют в барнах (один барн равен  $10^{-24}$  см<sup>2</sup>). Так, для реакции синтеза дейтерия и трития:



имеющей наибольшее сечение из реакций всех других легких элементов, максимальное значение сечения при энергии  $\sim 100$  кэВ составляет один барн.

## § 5. Упругие соударения

Динамика парных упругих соударений частиц (массой  $M_i$  и координатой  $\vec{r}_i$ ) определяется потенциальной энергией межчастичного взаимодействия  $W$  в соответствии с уравнением движения

$$M_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \vec{F}_i, \quad \vec{F}_i = -\nabla W.$$

При этом используют различные *потенциалы взаимодействия*  $U = W/e$ . Очевидно, что при соударении несжимаемых тел (например твердых шаров диаметра  $a$ ) потенциал имеет ступенчатый характер  $U(r) = 0$  при  $r \geq a$  и  $U(r) = \infty$  при  $r < 0$ . При этом полное сечение взаимодействия  $\sigma = \pi a^2$ . Наиболее короткодействующим является потенциал твердых сфер, а наиболее дальнедействующим – кулоновский потенциал. Все остальные потенциалы можно представлять в виде степенных потенциалов вида  $U \propto 1/r^n$ , где  $n$  меняется от единицы до бесконечности, или в виде экранированных кулоновских потенциалов вида (1.6) или их комбинаций.

В случае центрально симметричного потенциала межчастичного взаимодействия траектория частицы определяется прицельным параметром  $\rho$  и относительной скоростью частиц. *Дифференциальное сечение упругого рассеяния*  $d\sigma = 2\pi\rho d\rho$ .

Представляет интерес оценить энергию, которой должна обладать частица для того, чтобы произошла реакция синтеза (1.24). При нулевом прицельном параметре расстоянию наибольшего сближения ионов дейтерия и трития будет соответствовать равенство кинетической энергии налетающей частицы и потенциальной энергии их кулоновского расталкивания  $E = e^2/r_{яд}$ . Полагая  $r_{яд} = 10^{-12}$  см, получим  $E \approx 144$  кэВ, что близко к энергии, соответствующей максимуму сечения этой реакции.

При упругих соударениях любых тел, в том числе и атомных частиц, законы сохранения энергии и импульса приводят к хорошо известному из общей физики распределению сталкивающихся частиц по энергиям в зависимости от угла рассеяния (рис.1.5). Для обсуждения процессов в плазме крайне важно выражение для переданной в упругом соударении энергии, которое для первоначально

покоившейся частицы соответствует приобретенной ею энергии после соударения:

$$E_2 = E_0 \frac{4M_1M_2}{(M_1 + M_2)^2} \cos^2 \theta_2. \quad (1.24)$$

Из уравнения (1.24) следует, что максимальная переданная в упругом столкновении энергия не может превышать  $4M_1M_2/(M_1+M_2)^2$  от первичной энергии частицы. При соударениях ионов (атомов) и электронов переданная энергия составляет малую величину, определяемую отношением  $m_e/M_i$ .

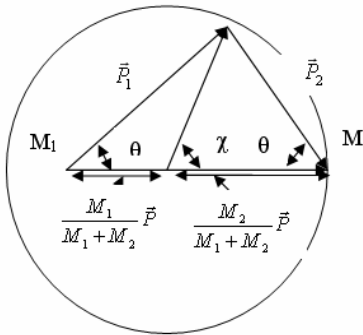


Рис.1.5. Диаграмма упругого рассеяния частиц. Частица массой  $M_2$  первоначально покоилась, а частица массой  $M_1$  имела импульс  $\vec{P}$ . Импульсы частиц после соударения  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$ ,  $\chi$  – угол рассеяния в системе центра инерции,  $\theta_1$  – угол рассеяния частицы  $M_1$ ,  $\theta_2$  – угол вылета частицы  $M_2$  в лабораторной системе

При соударениях нейтральных атомов и молекул следует учитывать возможность их взаимной поляризации на малых расстояниях. Поляризованные атомы или молекулы притягиваются полем, потенциал которого изменяется как  $U \propto 1/r^6$ . При дальнейшем сближении электронные оболочки взаимодействующих частиц взаимно проникают друг в друга, а силы молекулярного притяжения переходят в силы отталкивания. Определение зависимости этих сил от межчастичного расстояния представляет собой сложную

квантово-механическую задачу. На практике для их описания используют полуэмпирические аппроксимации, учитывающие резкую зависимость сил отталкивания от расстояния с помощью обратной степенной или экспоненциальной функции. Часто используют, на-

пример, потенциал Леннарда-Джонса, в котором соответствующая отталкиванию часть описывается функцией  $U \propto 1/r^{12}$ . Результирующий потенциал взаимодействия при этом:

$$U = 4U_{\min} \left[ \left( \frac{r_m}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_m}{r} \right)^6 \right] \quad (1.25)$$

имеет вид кривой с минимумом (рис.1.6).

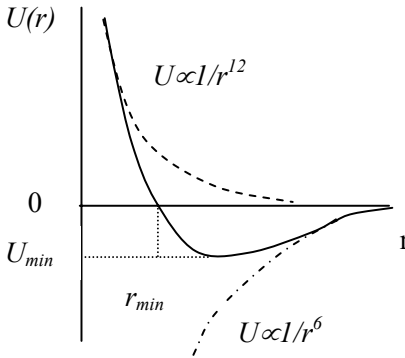


Рис.1.6. Потенциал взаимодействия между двумя медленными атомами

В первом приближении заряженные частицы взаимодействуют с нейтральными также, как и нейтральные частицы между собой. Заряженная частица своим полем поляризует нейтральную, и сечение рассеяния определяется не только геометрическими размерами нейтральной частицы, но и ее поляризуемостью. Особенно большой поляризуемостью обладают щелочные металлы

и некоторые атомы в возбужденном состоянии. Поляризуемость молекул существенно ниже, она близка к поляризуемости щелочных атомов.

Сечения упругих столкновений медленных электронов с атомами порядка квадрата размера атома. Следует иметь в виду, что для медленных электронов с энергиями в несколько электрон-вольт длина волны де-Бройля

$$\lambda = \hbar / p \quad (1.26)$$

больше размеров атома, поэтому описание взаимодействия возможно только квантовомеханическое. Дифференциальное сечение рассеяния в этом случае представляется в виде

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\theta,$$

где  $f(\theta)$  – амплитуда рассеяния на угол  $\theta$ .

Упругие столкновения заряженных частиц имеют иной характер, и в сильноионизованной плазме именно они определяют форму функций распределения и процессы переноса. Рассмотрим по-

ведение заряженной частицы (назовем ее пробной), пролетающей через облако покоящихся заряженных частиц (назовем их полевыми). В идеальной плазме каждое взаимодействие двух частиц можно рассматривать независимо от наличия остальных, но при вычислении полного сечения взаимодействия надо учесть экранирование плазмой поля данной частицы.

Если пробная частица движется так, что при отсутствии взаимодействия она пролетела бы мимо полевой на расстоянии прицельного параметра  $\rho$  (рис. 1.7), то она отклонится на угол  $\theta$ , зависящий от приведенной массы частиц  $\mu$ , их зарядов  $Z$  и относительной скорости  $v$ :

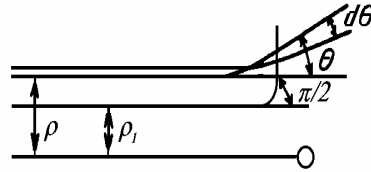


Рис.1.7. Схема упругого рассеяния

$$\operatorname{tg} \theta / 2 = \rho_{\perp} / \rho, \quad (1.27)$$

где

$$\rho_{\perp} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu v^2} \quad (1.28)$$

прицельный параметр, при котором пробная частица отклоняется на угол  $\pi/2$ . По существу, такое рассмотрение соответствует описанию движения одной частицы с приведенной массой  $\mu$  в поле центральных сил. Соотношение (1.27) позволяет найти зависимость дифференциального сечения рассеяния от угла и энергии частиц:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi\rho d\rho}{d\Omega} = \frac{\rho d\rho}{\sin\theta d\theta} = \left( \frac{\rho_{\perp}}{2\sin^2(\theta/2)} \right)^2 \propto \frac{Z_1^2 Z_2^2}{E^2 \sin^4(\theta/2)}, \quad (1.29)$$

что представляет собой известную *формулу Резерфорда*. Скорость пробной частицы при упругом рассеянии меняется только по направлению, уменьшаясь в проекции на первоначальное направление на величину  $\delta v = v(1 - \cos\theta)$ . Этой величиной, проинтегрированной по углам рассеяния, определяется значение коэффициента диффузии. Другие коэффициенты переноса (вязкость, теплопро-

водность) связаны со среднеквадратичным приращением поперечной скорости частиц при упругом рассеянии  $\Delta v = v \sin^2 \theta = v(1 - \cos^2 \theta)$ . Проинтегрированные по углам сечения этих процессов отличаются примерно в два раза. Проведя интегрирование  $\delta v$  по всем углам рассеяния  $\theta$  (или по всем значениям прицельного параметра  $\rho$ ), умножив на число полевых частиц в единице объема  $n$  и на путь пробной частицы  $dx$ , можно получить величину изменения скорости частицы в первоначальном направлении:

$$dv = -4\pi n v dx \rho^2 \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{\rho_\perp^2 + \rho^2}.$$

Очевидно, что этот интеграл логарифмически расходится на верхнем пределе. Однако следует учесть, что реально выделенная полевая частица экранируется окружающей плазмой и ее поле быстро уменьшается с увеличением расстояния. Характерное расстояние экранирования – дебаевский радиус  $d$ , и интегрировать следует в пределах  $0 < \rho < d$ . Тогда получим

$$dv = -2\pi n v \rho_\perp^2 dx \cdot \ln[1 + (d/\rho_\perp)^2].$$

Так как  $d/\rho_\perp \gg 1$ , то можно положить  $\ln[1 + (d/\rho_\perp)^2] \approx 2\Lambda$ , где

$$\Lambda = \ln\left(\frac{d}{\rho_\perp}\right) \quad (1.30)$$

*кулоновский логарифм*; величина  $\Lambda$  определяется рассеянием на малые углы, и обычно  $\Lambda \approx 10 \div 20$  при изменении параметров плазмы в широких пределах.

Можно ввести (несколько условно) *длину свободного пробега*  $\lambda$ , определив ее как расстояние, на котором  $dv = -v$ , (т.е. скорость в первоначальном направлении обращается в ноль):

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{\lambda}; \quad (1.31)$$

тогда, положив  $\lambda = \frac{1}{n\sigma_c}$ , где  $\sigma_c$  *сечение кулоновского рассеяния*,

имеем

$$\sigma_c = 4\pi \rho_\perp^2 \Lambda. \quad (1.32)$$



Обратная пропорциональность длины свободного пробега концентрации и сечению рассеяния для твердых сфер с сечением  $\sigma = \pi a^2$  очевидна из следующих рассуждений. Если частица движется со скоростью  $v$  в среде с концентрацией  $n$ , то она испытывает  $n\sigma v$  столкновений в единицу времени. Так как время между столкновениями  $\tau = 1/n\sigma v$ , то длина пробега между ними  $\lambda = v\tau = 1/n\sigma$ .

При кулоновских соударениях  $\sigma_c$  сильно зависит от энергии частиц ( $\rho_{\perp} = \frac{e^2}{\mu v^2}$ ) обратно пропорционально квадрату ее энергии (или квадрату температуры):

$$\sigma_c \approx \frac{1}{E^2}.$$

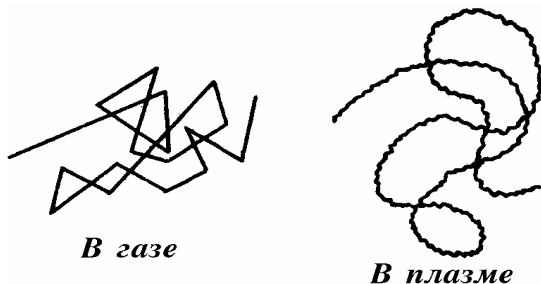


Рис.1.8. Траектория частицы в газе и в полностью ионизованной плазме

Для качественных оценок энергию относительного движения можно заменить на среднюю тепловую энергию  $\langle E \rangle \approx T$  (с усреднением по максвелловскому распределению по скоростям). В этом случае можно ввести зависящие от температуры эффективные сечения рассеяния, соответствующие им средние длины пробега и времена рассеяния. Тогда для *времени рассеяния* или *кулоновского времени*, имеем:

$$\tau_c = \frac{\lambda}{\langle v \rangle} = \frac{1}{n \langle \sigma_c \rangle \langle v \rangle}. \quad (1.33)$$

Легко видеть, что время рассеяния быстро растет с температурой

$$\tau_c \propto T^{3/2}. \quad (1.34)$$

Т.е. по мере роста температуры заряженные частицы рассеиваются медленнее.

Траектория заряженной частицы в плазме существенно отличается от траектории нейтральной частицы в газе (рис.1.8): в плазме – это медленно меняющаяся плавная кривая.

## §6. Неупругие процессы

Неупругих процессов огромное множество [1], но мы остановимся только на наиболее важных для физики горячей плазмы и рассмотрим их в соответствии с приведенной в §4 таб. 1.1. При этом сначала рассмотрим прямые процессы, затем обратные и отдельно остановимся на излучательных процессах.

### *Возбуждение, ионизация, диссоциация*

Причиной возбуждения электронной системы атома может быть как поглощение кванта электромагнитной энергии, так и соударения частиц. Возбужденные состояния возможны для всех сложных частиц – молекул, атомов, молекулярных и атомарных ионов (кроме иона атома водорода). В молекулах и молекулярных ионах могут быть возбуждены *вращательные, колебательные и электронные состояния*, а в атомах и атомарных ионах – только электронные. С энергетической точки зрения, наиболее легко возбуждаются вращательные уровни, труднее колебательные, еще труднее электронные. Если принять за единицу расстояние между электронными уровнями  $\delta E_e$ , то расстояние между колебательными уровнями  $\delta E_v$  будет меньше в  $\sqrt{\frac{m}{M}}$  раз, а между вращательными уровнями  $\delta E_j$  еще меньше: в  $\frac{m}{M}$  раз, где  $M$  – масса молекулы, а  $m$  – масса электрона. Например, для молекулы  $H_2$  расчетные значения энергий возбуждения соответствующих состояний  $E_s = 4,7$  эВ,  $E_v = 0,54$  эВ,  $E_j = 7,6 \cdot 10^{-3}$  эВ. Колебательные возбуждения отмечают индексом  $v$ , например  $AV_v$ , вращательные – индексом  $j$  (или  $r$ ), например  $DC_j$  (или  $DC_r$ ).

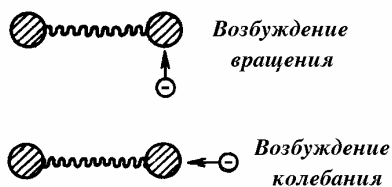


Рис.1.9. Схема возбуждения двухатомной молекулы электронным ударом

Схематично возбуждение при соударении с электронном симметричной двухатомной молекулы ( $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$  и т.д.) показано на рис.1.9. В таких молекулах дополнительно к трем поступательным степеням свободы могут возбуждаться электронные, две колебательные и две вращательные степени сво-

боды. Очевидно, что в более сложных молекулах (например,  $CO_2$ ) могут возбуждаться несколько разных колебательных мод.

Существование вращательных и колебательных степеней свободы в молекулярных газах определяет основные свойства слабоионизованной плазмы этих газов и дает возможность использовать их в плазмохимических и лазерных системах. Дело в том, что сечения упругого и неупругого (с возбуждением колебательных степеней свободы) процессов почти одинаковы (отличаются в несколько раз), а передаваемая от электрона энергия отличается в сотни и тысячи раз: при упругом соударении молекуле передается малая ( $\sim m/M$ ) доля энергии электрона (см. выражение (1.24)), а при возбуждении колебания передается энергия, соответствующая энергии перехода, т. е. масштаба десятых долей электрон-вольта. Колебательная релаксация (переход колебательной энергии в тепловую) весьма затруднена (при комнатной температуре – вероятность масштаба  $10^{-5}$ - $10^{-9}$ ), и поэтому реализуется существование систем с высокой колебательной температурой при малой поступательной (тепловой). Так можно обеспечить высокую *инверсную заселенность* колебательно-вращательных переходов, т.е. создать активную среду для лазеров.

Для слабоионизованной низкотемпературной плазмы характерно большое число колебательно-вращательно возбужденных молекул по сравнению с числом электронно-возбужденных. Заселение колебательно-вращательных уровней происходит активно при некоторых химических реакциях (например, горение углерода в кислороде с образованием  $CO$  – до 90% энергии ассоциации  $CO$  идет на возбуждение), в тлеющем разряде. Тушить возбуждение

можно различными путями — излучением (используется в лазерах), частичным переходом энергии возбуждения в энергию химических связей (используется в плазмохимии). По мере повышения температуры газа увеличивается число частиц с электронным возбуждением.

В обычных условиях электрон находится в атоме, молекуле (или ионе) *в основном состоянии*, соответствующем минимуму его потенциальной энергии. Получив некоторую добавочную энергию (от фотона или другой частицы), электрон может перейти на более высоколежащий энергетический уровень. Это — *электронно-возбужденное состояние*. Вероятность такого процесса определяется соответствующими сечениями возбуждения и сильно зависит от способа возбуждения. Возбуждение при соударении с частицами определяется величиной относительной скорости, зарядовым состоянием соударяющихся частиц и имеет резонансный характер. При этом, согласно критерию Мессе (выражение (1.21)), адиабатически маловероятными будут такие процессы, при которых при небольшой относительной скорости частиц для возбуждения того или иного уровня необходима существенная энергия. Так, практически не возбуждаются колебательные уровни энергии при тепловых скоростях молекул.

Сечение неупругого перехода атома из состояния 0 в состояние  $n$  согласно квантовой механике определяется амплитудой (матричным элементом) соответствующего перехода  $f_{0n}$  и отношением волновых чисел  $q = p / \hbar$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_n}{q_0} |f_{0n}|^2.$$

При возбуждении электронами, энергия которых существенно превышает энергию перехода, применимо борновское приближение, для которого

$$f_{0n} = -\frac{m_e}{2\pi\hbar^2} \int \Psi_n^*(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}} U(r, \vec{r}') \Psi_0(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}'.$$

Здесь  $\Psi$  — волновая функция атома,  $\vec{r}'$  — совокупность координат электрона,  $\vec{k} = q_n \vec{n} - q_0$  — величина передаваемого электрону импульса,  $U$  — потенциальная энергия взаимодействия налетающего электрона с атомными электронами и ядром атома с зарядом  $Z$

$$U = \sum_i \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}|} - \frac{Ze^2}{r}.$$

Полное сечение возбуждения пропорционально квадрату оператора дипольного момента атома  $D = \sum_i e\vec{r}_i$  и некой универсальной функции от отношения энергии электрона  $E$  и разницы уровней энергии  $\Delta E_{0n}$ , между которыми происходит переход  $\varphi(E/\Delta E_{0n})$ . Для описания излучения диполя вводят безразмерную величину – силу осциллятора

$$F_{0n} = (2m_e \Delta E_{0n} / \hbar^2 e^2) \left| \langle D_{0n} \rangle \right|^2.$$

С ее использованием сечение возбуждения (или неупругого рассеяния электрона) представляется в виде

$$\sigma_{0n} = \frac{2\pi m e^4}{(\Delta E_{0n})^2} F_{0n} \varphi\left(\frac{E}{\Delta E_{0n}}\right). \quad (1.35)$$

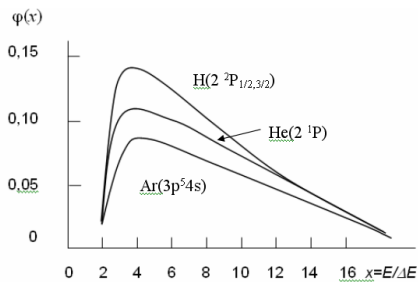


Рис.1.10. Вид функции  $\varphi(E/\Delta E_{0n})$  в выражении для сечения возбуждения (1.35), восстановленный из измерений для различных переходов в аргоне, гелии и водороде

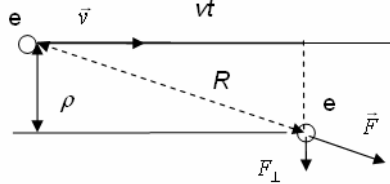
Графическое представление функции  $\varphi(E/\Delta E_{0n})$  показано на рис.1.10. Эта функция имеет порог при  $x \equiv E/\Delta E_{0n} \sim 2$ , затем достигает максимума в районе  $x \approx 4$ , а при больших значениях аргумента ведет себя как  $(\ln x)/x$ .

Качественно похожий вид зависимости сечения от энергии электрона и разности уровней можно получить и в квазиклассическом приближении, если положить, что быстрый электрон передает энергию внешнему (покоящемуся) электрону атома при их парном соударении (см. рис.1.11).

При этом предполагается, что налетающий со скоростью  $v$  электрон не отклоняется от своего первоначального направления и не тормозится. Уравнение движения атомного электрона в направлении, перпендикулярном направлению движения налетающего электрона, в этом случае:

$$m_e \frac{dv_{\perp}}{dt} = F_{\perp} = \frac{e^2}{[(vt)^2 + \rho^2]} \cdot \frac{\rho}{[(vt)^2 + \rho^2]^{1/2}},$$

где  $\rho$  – прицельный параметр. Энергия, приобретенная связанным электроном  $\Delta E = p^2/2m_e$ . Переданный импульс находится интегрированием  $F_{\perp}$  по времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Откуда  $\Delta E = e^4/E\rho$ . Выражая  $\rho$  через



$E$  и  $\Delta E$  и подставляя в дифференциальное сечение рассеяния, имеем

Рис.1.11. К модели Томсона

$$d\sigma = |2\pi\rho d\rho| = \frac{\pi e^4}{E(\Delta E)^2} d(\Delta E).$$

Интегрирование этого выражения по переданной энергии от 0 до энергии, соответствующей переходу  $\Delta E_{0n}$ , дает окончательное выражение для сечения возбуждения в виде

$$\sigma_{0n} = \frac{\pi e^4}{E} \left( \frac{1}{\Delta E_{0n}} - \frac{1}{E} \right). \quad (1.36)$$

Таким образом, сечение так же как и в формуле (1.35), зависит от энергии электрона и разности уровней, имеет порог и максимум.

Величина сечения возбуждения электронных уровней лежит в диапазоне  $10^{-16} - 10^{-18} \text{ см}^2$ .

Для ионизации частицы необходимо сообщить хотя бы одному ее электрону энергию большую, чем энергия его связи с этой частицей. Энергия, необходимая для ионизации, выраженная в электрон-вольтах, численно равна разности потенциалов в вольтах, которую должен пройти электрон для ее приобретения. Поэтому часто говорят не об энергии ионизации, а о *потенциале ионизации*. Легче всего оторвать первый, как правило, внешний, электрон, второй и последующие – труднее. Наибольший первый потенциал ионизации у He (24,5 В), наименьший у Cs (3,9 В). Второй потенциал обычно превышает первый в 2-3 раза, исклю-

чением являются щелочные металлы: наибольшая разница у Li (5,4 и 75,6 В соответственно).

Сечение ионизации при электронном ударе имеет качественно такой же вид, как и при возбуждении. Фактически, выше воспроизведено квазиклассическое рассмотрение процесса ионизации Томсоном. Подставив в формулу (1.36) вместо энергии возбуждения на некоторый уровень  $\Delta E_{0n}$  энергию ионизации  $I$ , получаем формулу Томсона:

$$\sigma_{0n} = \frac{\pi e^4}{E} \left( \frac{1}{I} - \frac{1}{E} \right). \quad (1.37)$$

Порог ионизации совпадает с  $I$ , а максимум сечения приходится на энергию  $E=2I$ . Таким образом, для максимального значения сечения ионизации из выражения (1.37) имеем  $\sigma_{max} = \pi e^4 / 4I^2$ .

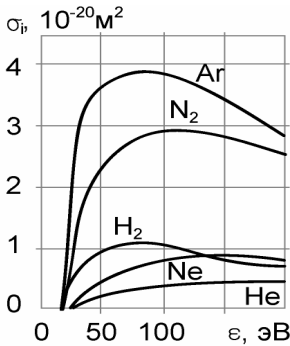


Рис.1.12. Сечения ионизация электронным ударом разных атомов и молекул

Для водорода энергия ионизации равна одному Ридбергу  $I \equiv R_y = e^2/2a_B$ , откуда для максимального значения сечения ионизации имеем  $\sigma_{max} = \pi a_B^2$ . Если атом многоэлектронный и имеет на внешней оболочке  $N$  (валентных) электронов, то сечение (1.37) надо умножить на  $N$ . На рис.1.12 приведены сечения ионизации для некоторых атомов. Как и для сечения возбуждения, сечение ионизации для разных атомов может быть представлено в виде единой аппроксимационной формулы

$$\sigma_i^e = \frac{N\pi e^4}{I^2} f\left(\frac{E}{I}\right), \quad (1.38)$$

в которой  $f(E/I)$  с точностью  $\sim 20\%$  имеет универсальный вид для различных ионов и молекул [1]. Следует иметь в виду, что экспериментально измеренные сечения ионизации достигают максимума при  $E/I \sim 5$ .

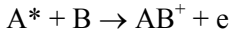
Энергию ионизации можно передать и в процессе нескольких соударений, причем в каждом передается энергия меньше, чем необходимо для отрыва электрона. При каждом соударении частица получает энергию, переходит в более возбужденное состояние, а затем ионизируется уже из возбужденного состояния. Такая *ступенчатая ионизация* особенно важна в низко-температурной плазме, когда энергия электронов меньше потенциала ионизации. При этом сечение ионизации с возбужденного состояния существенно возрастает (более чем на порядок для He).

Образование иона возможно также при распаде так называемого *автоионизационного состояния* нейтрального атома, в котором энергетический уровень возбужденного связанного состояния атомной частицы и электрона находится выше границы непрерывного спектра, т. е. больше потенциала ионизации атома. Если возбуждено несколько электронов и если энергия возбуждения будет передана одному электрону, то произойдет ионизация – электрон перейдет в свободное состояние, а ион останется в основном (невозбужденном) состоянии. Следует отметить, что время жизни частицы в автоионизационном состоянии значительно больше характерного атомного.

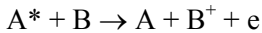
Характер зависимости от энергии сечения *ионизации ионным ударом* качественно похож на таковой для электронного удара. И действительно, если, например, в модели Томсона налетающий электрон заменить протоном, то ход рассуждения не должен измениться, так как переданный импульс зависит только от относительной скорости частиц. Поэтому сечение ионизации ионным ударом  $\sigma_i^i$  на шкале энергий должно быть сдвинуто в  $\sim M_i/m_e$  раз (см. рис.1.14, на котором приведена сводка сечений основных элементарных процессов, важных для горячей водородной плазмы).

Ионизация возможна также при столкновении нейтральных атомов, один из которых возбужден (обозначается  $A^*$ ). Например, когда энергия возбуждения одного из атомов превышает энергию ионизации второго или образовавшейся при соударении молекулы. Процессы могут протекать по следующим основным схемам:



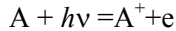


- ассоциативная ионизация сопровождается образованием молекулярного иона,



- процесс Пеннинга происходит, если энергия возбуждения атома  $A^*$  в метастабильное состояние больше потенциала ионизации частицы  $B$ .

### Фотоионизация

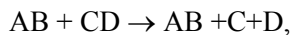
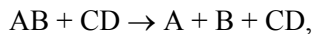


происходит, если энергия кванта больше энергии ионизации, что для длины волны излучения соответствует формуле:

$$\lambda[\text{см}] = \frac{1,23 \cdot 10^{-6}}{I[\text{эВ}]}.$$

Сечение фотоионизации примерно на два порядка меньше, чем при ионизации электронным ударом, оно максимально при энергии квантов вблизи порога и резко падает с увеличением длины волны. Для атома водорода и квантов с энергией, много большей энергии ионизации  $\sigma_{h\nu}[\text{см}^2] \approx 23,8\lambda^{7,2}$ . Возбуждение фотонами имеет четкий резонансный характер для атомов и атомарных ионов и более "размыто" для молекул.

*Диссоциацией* называют процесс разделения сложных молекул (или молекулярных ионов) на более простые молекулы, или на атомы (или ион и атом, ион и молекула). Энергия разрыва молекулярных связей почти всегда меньше энергии ионизации (за исключением, пожалуй, молекул  $\text{CO}_2$  и  $\text{C}_2\text{H}_2$ ). Часто диссоциацию облегчает накопление энергии на колебательно-вращательных уровнях молекулы. Диссоциация молекул и молекулярных ионов возможна за счет множества различных процессов, при которых молекуле передается энергия больше энергии диссоциации. Например, при столкновении молекул между собой возможны различные процессы распада:



При электронном ударе сечения диссоциации ведут себя так же как и сечения других неупругих процессов под действием электронов.

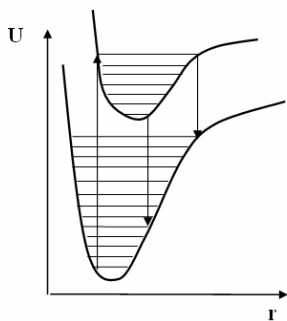


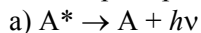
Рис.1.13. Франк-кондоновские переходы между электронными термами двухатомной молекулы

Образующиеся при диссоциации атомы называются франк-кондоновскими по названию принципа Франка-Кондона, согласно которому переходы между энергетическими уровнями молекулы (термами) (рис.1.12) происходят очень быстро по сравнению с движением ядер. Так как при таком быстром переходе расстояния между ядрами не успевают измениться, то франк-кондоновский переход можно изобразить вертикальной линией между соответствующими энергетическими уровнями. Причем эти переходы происходят в точках пересечения колебательных уровней (изображены на рис.1.13 горизонтальными прямыми) с электронными термами. Квазиклассическое объяснение состоит в том, что в этих точках «поворота» колеблющиеся ядра атомов находятся наиболее долго.

### *Девозбуждение, рекомбинация*

Возбужденные атомы и молекулы не могут долго оставаться в таком состоянии, поскольку возбужденные состояния имеют вполне определенное конечное время жизни  $\tau$ , спустя которое происходит переход в основное состояние, сопровождающийся излучением кванта. В большинстве случаев  $\tau=10^{-7}$  -  $10^{-8}$ с, однако существуют и метастабильные состояния, время жизни в которых существенно выше  $\tau =10^{-1}$ - $10^{-4}$ с и зависит от свойств и концентрации.

Снятие электронного возбуждения возможно многими путями, например:



- *высвечивание* при возвращении электрона на основной уровень (возможно

- ступенчатое путем испускания ряда фотонов);
- б)  $A^* + BC \rightarrow A + BC$   
 $A + B + C$  ↙  
 - тушение при столкновении с молекулой, энергия возбуждения переходит или в кинетическую энергию частиц, или расходуется на диссоциацию молекулы (тушение при соударении с атомом маловероятно);
- в)  $A^* + B \rightarrow B^* + A$  - передача возбуждения реализуется с большой вероятностью, если мало изменение энергии перехода (резонансный процесс);
- г)  $A^{Z+1} + e \rightarrow (A^Z)^{**} \rightarrow A^Z + h\nu$  - диэлектронная рекомбинация автоионизационного состояния возбужденного иона с зарядом  $Z$ ;
- д)  $A^{Z+1} + e \rightarrow (A^Z)^{**} \rightarrow A^Z + e$  - автоионизационный распад того же состояния за счет эффекта Оже.

Эффект Оже состоит в передаче энергии электрона, переходящего на более низкий энергетический уровень, другому электрону. Процессом, обратным ионизации, является объединение иона и электрона - образование нейтральной частицы или понижение зарядности иона, его называют рекомбинацией. При рекомбинации выделяется энергия, равная энергии связи рекомбинирующих частиц. Эта энергия может выделиться в виде излучения, или может быть передана третьей частице (обычно одному из электронов плазмы). В первом случае говорят о *фоторекомбинации*, во втором – о *тройной рекомбинации*. Очевидно, что второй случай реализуется при высоких плотностях плазмы.

Иногда рекомбинацией называют и ассоциацию молекул из атомов, т.е. процессы типа  $A + 2B \rightarrow AB + B$ ,  $A + B + C \rightarrow AB + C$ , или  $A + 2A \rightarrow A_2 + A$ .

*Перезарядка.* Весьма важным является процесс передачи заряда от заряженной частицы к нейтральной:



В случае тождественных частиц  $A$  и  $B$  (кроме зарядового состояния) процесс носит резонансный характер и обладает очень большим сечением, значительно большим, чем сечение ионизации.

Если потенциал ионизации нейтральной частицы больше потенциала ионизации заряженной частицы, то на величину энергии, соответствующую этой разнице, уменьшится полная кинетическая энергия частиц. В случае, если энергия ионизации заряженной частицы больше энергии ионизации нейтральной частицы, то избыток энергии выделится или в виде кинетической энергии частиц, или пойдет на возбуждение (у атомов последнее бывает редко).

Наиболее важные для описания плазмы в термоядерных установках сечения неупругих процессов с участием атомарного водорода приведены на рис.1.14. Так как все неупругие процессы зависят от относительной скорости частиц, то в плазме существенную роль играют скорости соответствующих процессов  $\langle \sigma v \rangle$ . Треугольные скобки означают, что произведено усреднение по максвелловскому распределению частиц по скоростям. На рис.1.15 показана зависимость скорости основных неупругих процессов в водородной плазме от ее температуры.

### ***Излучательные процессы***

Многие из вышеупомянутых неупругих процессов сопровождаются излучением квантов электромагнитного излучения. Не останавливаясь на релаксации колебательных и вращательных возбуждений в плазме с участием молекул, подчеркнем, что релаксация или девозбуждение электронных уровней сопровождается *линейчатым излучением*. Напомним, что энергия излучаемых квантов при девозбуждении атома водорода выражается известной формулой

$$h\nu = R_y \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (1.39)$$

где  $R_y=13,6$  эВ – энергия Ридберга,  $n_i = 1,2,3,4 \dots$ ,  $n_k = n_i+1, n_i+2, n_i+3 \dots$ .  $n_i=1$  соответствует серия Лаймана,  $n_i=2$  – серия Бальмера,  $n_i=3$  – серия Пашена,  $n_i=4$  – серия Брэкета. Спектральные линии серии Лаймана обозначаются  $L_\alpha, L_\beta, L_\gamma$ , где буквы греческого алфавита соответствуют переходам с уровней  $n_k=2,3,4$  и т.д. Аналогично, для серии Бальмера принято обозначение  $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$  и т.д. С ростом температуры плазмы интенсивность линейчатого излучения падает (до тех пор, пока

не начинает возбуждаться более глубокая электронная оболочка атома, см. рис. 9.9).

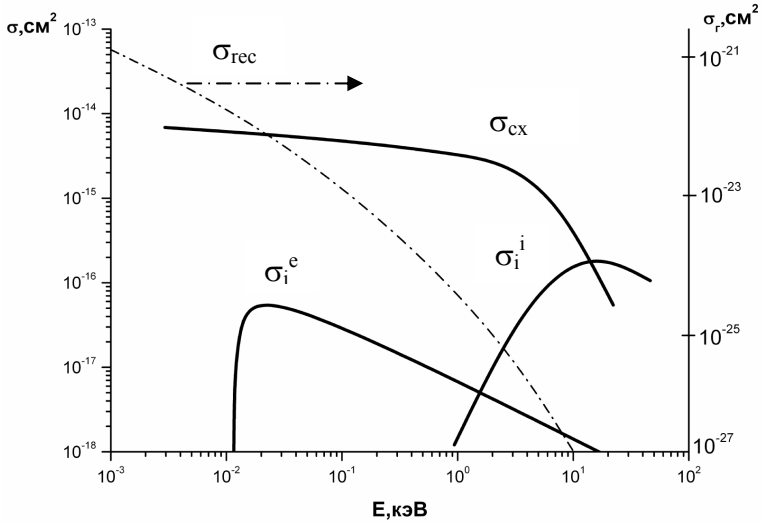


Рис.1.14. Энергетическая зависимость основных сечений неупругих процессов для атомарного водорода:  $\sigma_i^e$  – сечение ионизации электронным ударом,  $\sigma_i^i$  – сечение ионизации ионным ударом,  $\sigma_{\text{cx}}$  – сечение резонансной перезарядки,  $\sigma_{\text{rec}}$  – сечение фоторекомбинации.

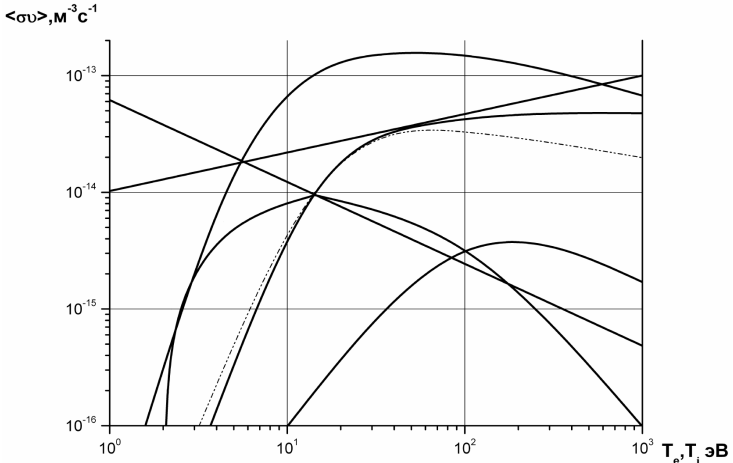


Рис.1.15. Скорости основных неупругих процессов для водорода

При температуре  $T_e > 1$  кэВ интенсивность линейчатого излучения атомов с  $Z \approx 10$

$$P_{\text{лин.}} \propto n_i n_e \frac{Z^6}{T_e^{3/2}}. \quad (1.40)$$

Фоторекомбинация электрона из области непрерывных уровней дает сплошной спектр. В ходе диэлектронной рекомбинации электрон остова переходит на основной уровень, а ион меньшей кратности остается возбужденным. Спектр излучения представляет собой суперпозицию сплошного и линейчатого. Мощность энергии, уносимой *рекомбинационным излучением*,

$$P_{\text{лин.}} \propto n_i n_e \frac{Z^4}{T_e^{1/2}}. \quad (1.41)$$

При большей температуре, когда электроны свободные, они могут излучать в процессе их торможения на ионах (свободно-свободные столкновения). Так как мощность излучения при торможении заряженной частицы пропорциональна квадрату ускорения, то при кулоновском взаимодействии

$$P_{\text{торм}} \propto \left| \ddot{r} \right|^2 = (e^2 Z / m_e)^2$$

(из за большой массы излучение ионов при торможении пренебрежимо мало). Спектр тормозного излучения непрерывный (рис.1.16) с коротковолновой границей, соответствующей энергии электрона, и максимумом при:  $\lambda(A) \approx 6200/T_e$  [эВ]. (Энергия и длина волны кванта в ангстремах связаны соотношением  $E[\text{эВ}] = 12395/\lambda[\text{Å}]$ ). Мощность тормозного излучения растет с температурой

$$P_{\text{торм}} = K_{\text{торм}} n_i n_e Z^2 T_e^{1/2}. \quad (1.42)$$

Если удельную мощность измерять в ( $\text{Вт}/\text{м}^3$ ), концентрацию в ( $\text{м}^{-3}$ ), а температуру в (эВ), то  $K_{\text{торм}} = 1.7 \cdot 10^{-38}$ . Таким образом, если линейчатое (1.40) и рекомбинационное (1.41) излучение быстро падает с ростом температуры, то тормозное излучение становит-

ся основным каналом радиационных потерь энергии в высокотемпературной плазме. Вращаясь по окружности в магнитном поле, заряженная частица также испытывает центростремительное ускорение. Поэтому в сильных магнитных полях возникает *магнитотормозное излучение*. При нерелятивистских скоростях оно называется *циклотронным* излучением, при релятивистских – *синхротронным* излучением. Так как центростремительное ускорение обратно пропорционально ларморовскому радиусу вращения электрона в магнитном поле, то такое излучение становится доминирующим в сильных магнитных полях при очень высокой

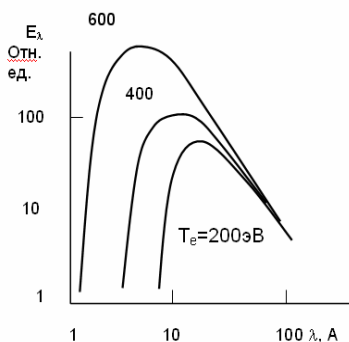


Рис.1.16. Спектральное распределение тормозного излучения

температуре плазмы:

$$P_{\text{цикл}} \propto \left| \ddot{\vec{r}} \right|^2 = (v^2 / \rho_l)^2 \propto T_e H^2 .$$

В главе 9 при обсуждении энергетического баланса высокотемпературной плазмы на рис.9.9 показана зависимость радиационных потерь для различных элементов. Если для водорода при температурах выше  $\sim 100$  эВ доминирует тормозное излучение, то для тяжелых элементов потери энергии определяются линейчатым излучением атомных остовов непольностью ионизованных атомов, их излучением за счет фото- и диэлектронной рекомбинации.

## § 7. Равновесия в плазме

При *полном термодинамическом равновесии* должно установиться равенство скоростей всех прямых и обратных процессов, а также равенство всех температур (вращательных, колебательных, электронной, ионной, атомной). Такую сложную схему рассмотреть крайне трудно, а может быть и невозможно. Часто говорят о *частичных равновесиях* – при малых температурах по всем степеням свободы (кинетической энергии электронов и ионов, колеба-

тельным, вращательным состояниям), при больших, когда молекул и атомов уже практически нет, – о температурах хаотического движения электронов и ионов.

Рассмотрим примеры ионизационного равновесия в атомарном газе (не рассматриваем молекулы, так как это резко усложняет задачу – надо рассматривать колебательно-возбужденные состояния, ассоциативную ионизацию и т.д.; не рассматриваем также и автоионизационные состояния). Простейшими и одновременно наиболее часто встречающимися являются следующие три случая.

### ***Баланс между ионизацией электронным ударом и тройной рекомбинацией***

Процесс	(прямой/обратный)	Скорость процесса
$a+e \rightarrow i+2e$	(ионизация)	$w_i = k_i n_a n_e$
$i+2e \rightarrow a+e$	(рекомбинация)	$w_p = k_p n_i n_e^2$

Здесь  $n_a$ ,  $n_i$ ,  $n_e$  – плотности атомов, ионов и электронов соответственно;  $k_i$ ,  $k_p$  – коэффициенты скорости ионизации и рекомбинации. Скорость производства, например, ионной компоненты в таких процессах определяется уравнением:

$$\frac{dn_i}{dt} = w_i - w_p.$$

В равновесии скорости прямого и обратного процессов совпадают, так что должно быть  $w_i = w_p$ , и константа равновесия  $K$ , которая определяется как отношение коэффициентов скоростей прямых и обратных процессов, оказывается равной:

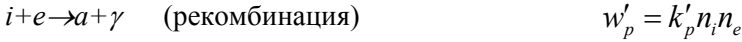
$$K = \frac{k_i}{k_p} = \frac{n_e n_i}{n_a}.$$

Заметим, что введенная таким образом константа равновесия имеет размерность куба обратной длины.

### ***Баланс между фотоионизацией и фоторекомбинацией***

Процесс (прямой/обратный)	Скорость процесса
$a+\gamma \rightarrow i+e$ (ионизация)	$w'_i = k'_i n_a j$





Здесь  $n_a, n_i, n_e$  - плотности атомов, ионов и электронов соответственно,  $k'_i, k'_p$  - коэффициенты скорости фотоионизации и фоторекомбинации.

В равновесии

$$w'_i = w'_p,$$

и константа равновесия, определяемая так же как и в предыдущем случае, оказывается равной

$$K = \frac{k'_i j}{k'_p} = \frac{n_i n_e}{n_a}$$

(по принципу детального равновесия), так что в обоих случаях

$$K = \frac{n_i n_e}{n_a}. \qquad (1.43)$$

**Баланс между ионизацией электронным ударом и фоторекомбинацией**

В предыдущем примере предполагается, что излучение заперто и не выходит из реакционного объема. Если же плазма прозрачна для излучения, т.е. её плотность достаточно мала, то мала скорость фотоионизации, и ионизация обусловлена главным образом соударениями. В плазме малой плотности маловероятны и тройные соударения, поэтому главным конкурирующим процессом является рекомбинация с излучением:

Процесс (прямой/обратный)	Скорость процесса
$a+e \rightarrow i+2e$ (ионизация)	$w'_i = k'_i n_a n_e$
$i+e \rightarrow a+\gamma$ (рекомбинация)	$w'_p = k'_p n_i n_e$

Приравнивая скорости прямого и обратного процессов, получим *формулу Эльверта*:

$$K' = \frac{n_i}{n_a} = \frac{k_i}{k_p}. \quad (1.44)$$

### **Степень ионизации**

*Степень ионизации* определяют как отношение числа ионов к полному числу частиц  $n_0$ .

$$\alpha = \frac{n_i}{n_i + n_a} = \frac{n_i}{n_0}. \quad (1.45)$$

В случае применимости формулы Эльверта из (1.44) следует, что степень ионизации в этом случае

$$\alpha = \frac{K'}{1 + K'}$$

не зависит от плотности и является функцией только от температуры, так как от температуры зависит константа равновесия.

В общем случае связь между степенью ионизации и константой равновесия может быть определена следующим образом. Из формулы (1.45) следует, что

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

В то же время из условия квазинейтральности и определения  $K$  (1.43) имеем  $n_i^2/n_a = K$ , откуда:

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{K}{n_0}. \quad (1.46)$$

Для плазмы, находящейся в термодинамическом равновесии, константа равновесия  $K$  может быть получена как по аналогии с константой химического равновесия, так и из кинетических соображений [2], и оказывается равной:

$$K = \frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{g_i g_e}{g_a} \left( \frac{\mu T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-1/T}, \quad (1.47)$$

где  $g_i, g_e, g_a$  – статистические веса ионов, электронов и атомов соответственно;  $I$  – энергия ионизации атома;  $\mu = m_e m_i / (m_e + m_i)$  – приведенная масса. Выражение (1.47) называется *формулой Саха*.

К этой формуле приводят следующие качественные рассуждения. В термодинамическом равновесии отношение числа электронов к числу нейтральных атомов может быть определено из распределений Больцмана

$$\frac{n_e}{n_a} = \frac{G_e \exp(-\frac{E_e}{T})}{G_a \exp(-\frac{E_a}{T})},$$

где  $G_e$  – число квантовых ячеек в фазовом пространстве для свободных электронов,  $G_a$  – то же для атомов. Так как  $E_e - E_a = I + p^2/2m_e$ , то при кинетической энергии электрона, много меньшей энергии ионизации  $p^2/2m_e \ll I$ , можно положить  $E_e - E_a \approx I$ . Полагая затем  $G_a = 1$  и учитывая объем фазового пространства, приходящегося на один электрон,

$$G_e = \frac{p^3}{h^3} V = \left( \frac{\sqrt{2m_e T}}{h} \right)^3 \frac{1}{n_e},$$

имеем

$$\frac{n_e}{n_a} = \left( \frac{\sqrt{2m_e T}}{h} \right)^3 \frac{1}{n_e} e^{-\frac{I}{T}} = \frac{K}{n_e},$$

откуда из условия квазинейтральности  $n_e = n_i$  и определения  $K$  (1.43) с точностью до числовых коэффициентов окончательно получаем выражение (1.47).

В удобном для расчетов виде выражение (1.47) можно записать следующим образом

$$K = \frac{g_e g_i}{g_a} 3 \cdot 10^{21} T^{3/2} e^{-\frac{I}{T}},$$

где температура выражена в эВ.

Отвечающая равновесию степень ионизации  $\alpha$ , в соответствии с (1.46), определяется соотношением

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} = \frac{g_i g_e}{g_a} \left( \frac{\mu T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{T}{p} e^{-I/T}, \quad (1.48)$$

где  $p = (n_e + n_i + n_a)T = n_0(1 + \alpha)T$  – давление, определяемое числом частиц всех сортов в единице объема.

Формула (1.47) – *формула Саха* – связывает основные фундаментальные характеристики взаимодействующих частиц: приведенную массу (для процесса ионизации она примерно равна массе электрона  $m_e$  с точностью до малого отношения  $m_e/m_i$ , где  $m_i$  – масса иона), статистические веса частиц (иона, электрона, атома), энергию ионизации атома и температуру плазмы с константой равновесия  $K$ , с помощью которой можно рассчитать степень ионизации газа. Фундаментальные характеристики хорошо известны: статистический вес электрона равен двум, а статистические веса атома и иона рассчитываются независимо, они равны числу состояний с данным главным квантовым числом, например, для атома водорода в состоянии с главным квантовым числом, равным  $n$ , статистический вес равен  $2n^2$ . Константа равновесия  $K = n_e n_i / n_a$  зависит только от температуры  $T$ .

Хотя формула Саха (и ее аналоги) применима к плазме, находящейся в полном термодинамическом равновесии, ее используют при оценке и для плазмы в случае неполного термодинамического равновесия. Следует иметь в виду, кроме того, что она верна лишь при некоторых упрощающих предположениях относительно этого равновесия: газ считается классическим, подчиняющимся распределению Максвелла-Больцмана, тем самым наименьшая длина волны де Бройля, электронная, должна быть меньше среднего межчастичного расстояния; плазма должна быть разреженной настолько, что среднее расстояние между частицами оказывается большим по сравнению с амплитудой рассеяния, тогда электроны, ионы и атомы можно рассматривать как смесь идеальных газов; наконец, температура этой смеси должна быть мала в сравнении с энергией ионизации – при этом условии количество возбужденных атомов мало по сравнению с числом атомов в основном состоянии. Между тем, в некоторых условиях оказывается существенной ступенчатая ионизация – образование заряженных частиц из возбужденных атомов, постепенно «довозбуждаемых» до ионизации при столкновениях через последовательность возбужденных состояний. Реализация этой возможности зависит от времени жизни возбужденных атомов, плотности электронов, потенциалов ионизации атомов в основном и в возбужденных состояниях.

Реально с полностью термализованной плазмой сталкиваются, пожалуй, только астрофизики да, возможно, при атомных и термоядерных взрывах. В термоядерных установках стремятся получить такую термализованную плазму; наиболее близка к ней плазма в импульсных "взрывных" системах. В системах с магнитной термоизоляцией (адиабатических ловушках, токамаках и т.д.) плазма всегда неравновесная, хотя иногда и осуществляется частичное равновесие – устанавливаются функции распределения, близкие к максвелловским, соответственно при электронной и ионной температурах.

## § 8. Неравновесность плазменных систем

Обычно в плазме всегда есть частицы очень сильно различающиеся по массе: тяжелые молекулы, атомы и их ионы, и значительно более легкие электроны. Взаимодействие тяжелых и легких частиц не симметрично: легкие частицы сильно рассеиваются на тяжелых и очень медленно передают им свою энергию, тогда как тяжелые частицы на легких частицах почти не рассеиваются, но довольно интенсивно тормозятся. В большинстве случаев плазму создают, применяя электрическое поле: или прямо помещая в газ электроды с некоторой разностью потенциалов (например, дуговые плазмотроны, приборы с тлеющим разрядом, Z-пинчи и т.д.), или индуктивно наводя переменную ЭДС в объеме (например, СВЧ-плазмотроны, токамаки (см. главу 9) и т.д.). Подвижности электронов и ионов в электрическом поле сильно различаются, сечения взаимодействия их с атомарными частицами разные, и обычно электроны в электрическом поле приобретают большую энергию, чем ионы. В различных по конструкции системах разряды развиваются по-разному, но, как правило, не только направленные скорости, но и энергия, приобретаемая электроном в разряде, больше энергии, приобретаемой ионом. Особенно четко это проявляется в низкотемпературной плазме пониженного давления, которая образуется в тлеющем разряде (§51). Рассмотрим в качестве примера положительный столб этого разряда, типичные значения для него: степень ионизации 0,01, давление 1-10 Торр, напряженность поля 1-10 В/см.

Так как в таких условиях заряженные частицы сталкиваются в основном с нейтральными атомами, то в первом приближении положим, что сечения их соударений равны газокинетическим (см. §5). Предположим, что тепловая энергия частиц до включения электрического поля мала по сравнению с энергией, сообщаемой полем заряженным частицам. Под действием электрического поля с напряженностью  $E$  ион приобретает на длине  $\lambda$  свободного пробега между соударениями энергию

$$\Delta w_i = eE\lambda_i,$$

а электрон

$$\Delta w_e = eE\lambda_e. \quad (1.49)$$

Считаем, что ионы – однозарядные, так что по модулю заряд иона равен заряду электрона. В принятом предположении

$$\lambda_e = v_e \tau_e = \frac{eE}{m_e} \tau_e^2,$$

и, следовательно,

$$\Delta w_e = \frac{e^2 E^2}{m_e} \tau_e^2. \quad (1.50)$$

Средняя энергия иона будет практически равна средней энергии нейтральных частиц, так как, приобретая между соударениями некую энергию, ион при соударении с нейтральными атомами ее отдает в силу близости масс (формула (1.24)). Нейтральная же частица, получившая энергию при соударении, в последовательности соударений переносит ее на стенки. Электрон в отличие от иона при упругом соударении с нейтральным атомом теряет лишь малую часть порядка  $(m_e/M_a)$  своей средней энергии  $\bar{w}_e$ .

Время между соударениями связано со средней энергией электрона очевидным соотношением

$$\tau_e = \lambda_e / \sqrt{\frac{2\bar{w}_e}{m_e}}. \quad (1.51)$$

В состоянии равновесия потеря энергии электронами в соударениях будет равна приобретению энергии в электрическом поле (1.50):

$$\frac{m_e}{M_a} \bar{w}_e \cong \frac{e^2 E^2}{m_e} \tau_e^2.$$

Подставляя формулы (1.51) и (1.49), для средней энергии электрона имеем

$$\bar{w}_e \approx \Delta w_e \sqrt{\frac{M_a}{m_e}}. \quad (1.52)$$

Таким образом, средняя энергия электронов оказывается много больше энергии, которую он получает при ускорении в электрическом поле на длине свободного пробега (примерно столько же, сколько и ион). Поэтому главной причиной того, что температура электронов оказывается много больше ионной температуры, ока-

зывается определяемый по выражению (1.24) невысокий темп передачи энергии более тяжелым частицам.

Как упоминалось ранее, это обеспечивает инверсную заселенность в молекулярных газах, правда, только при низких температурах газа: вероятность колебательной релаксации очень быстро возрастает с температурой. Поэтому и приходится охлаждать лазеры, делать системы с протоком газа, т.е. обеспечивать условия, при которых колебательная температура существенно выше температуры хаотического движения:  $T_v \gg T$ . Например, в лазерах на окиси углерода достижимы колебательные температуры, равные 7000 – 8000 К, при температуре газа, равной комнатной. Неравновесность в отношении средней энергии электронов, которая составляет единицы электрон-вольт, и температура основной среды, которая немного больше комнатной, обеспечивает и интенсивное проведение некоторых химических реакций. Электроны передают энергию на возбуждение колебательных степеней свободы молекул, а высокая колебательная температура обеспечивает и высокие скорости химических реакций. Необходимо отметить, что при этом существенно возрастает и КПД установок, основанных на газовом разряде, по выходу конечного продукта: электронное возбуждение обеспечивает передачу энергии именно на “нужные” степени свободы, а не равномерно на все. Так, КПД СО-лазера довели до ~25%, затраты энергии при получении NO из N<sub>2</sub> и O<sub>2</sub> снизили в 6-7 раз. Мы рассмотрели неравновесность слабоионизованной плазмы (или, если хотите, газа — степень ионизации которого меньше 0.01, а в лазерных средах бывает и 10<sup>-6</sup>) и возможности ее использования. Но и практически полностью ионизованная горячая плазма тоже, как правило, неравновесна. Например, в токамаках (см. главу 9) устанавливаются разные температуры электронов и ионов, не говоря уже об отсутствии равновесия с излучением.

## § 9. Процессы релаксации в плазме

Процессы релаксации приводят к установлению максвелловской функции распределения частиц по энергиям, то есть термодинамического равновесия, когда можно говорить о температуре. В слабоионизованной плазме температура ионов равна температуре газа, массы ионов и атомов практически одинаковы. Температура

электронов может быть другой, чем у атомов газа, даже тогда, когда электронов очень мало [1].

В полностью ионизованной плазме практически есть только электроны и ионы. Равновесие будет устанавливаться вследствие кулоновских соударений заряженных частиц. Так как массы ионов и электронов сильно различны, то рассмотрим отдельно электрон-электронные и ион-ионные взаимодействия. Предположим, что  $K$  соударений приводят к максвеллизации данного, например, электронного ансамбля. Тогда время установления максвелловского распределения среди электронов

$$\tau_{ee} = K \frac{1}{nv\sigma_c}.$$

Подставляя значение сечения кулоновского рассеяния  $\sigma_c$  из выражения (1.32) и  $v = \sqrt{\frac{3T_e}{m_e}}$ , получим:

$$\tau_{ee} \approx K \frac{3\sqrt{3}}{4\pi e^4 \Lambda} \frac{\sqrt{m_e}}{n} T_e^{3/2}. \quad (1.53)$$

Строгий расчет показывает, что  $K < 2$ . Аналогичный расчет для ионов дает

$$\tau_{ii} = K \frac{3\sqrt{3}}{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4 \Lambda} \frac{\sqrt{M_i}}{n} T_i^{3/2}, \quad (1.54)$$

где  $Z_{1,2}$  – кратности ионизации. Сравним  $\tau_{ee}$  и  $\tau_{ii}$ : для равных температур  $T_e = T_i$ , предполагаем  $Z_1 = Z_2 = 1$ :

$$\frac{\tau_{ee}}{\tau_{ii}} = \sqrt{\frac{m_e}{M_i}}. \quad (1.55)$$

Откуда следует  $\tau_{ee} \ll \tau_{ii}$ .

Так как масса ионов значительно превышает массу электронов, то получаем

$$\tau_{ee} \ll \tau_{ii}.$$

Приведенные формулы для характерных времен столкновений, конечно, имеют лишь характер оценки. Детальный расчет [11] показывает, что при кулоновском столкновении заряженной частицы



сорта “ $\alpha$ ” с заряженной частицей сорта “ $\beta$ ” характерное время между столкновениями (время торможения) оказывается равным:

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{3T_{\alpha}^{3/2}m_{\alpha}}{4\sqrt{2\pi}e^4Z_{\alpha}^2Z_{\beta}^2n_{\beta}\sqrt{\mu_{\alpha\beta}}\Lambda}, \quad (1.56)$$

где  $Z_{\alpha}$ ,  $Z_{\beta}$  – заряды этих частиц,  $m_{\alpha}$ ,  $m_{\beta}$  – массы, а  $\mu_{\alpha\beta} = m_{\beta}m_{\alpha}/(m_{\beta}+m_{\alpha})$  – приведенная масса. Здесь индексы  $\alpha$  и  $\beta$  обозначают сорт плазменных частиц. Используя эту общую формулу, можно получить характерные времена между электрон-электронными, электрон-ионными и ион-ионными столкновениями. Например, для плазмы из электронов и однозарядных ионов получаем следующий набор характерных времен:

$$\tau_{ei} = \frac{3T_e^{3/2}\sqrt{m_e}}{4\sqrt{2\pi}e^4n\Lambda},$$

$$\tau_{ee} = 2^{1/2}\tau_{ei}, \quad \tau_{ii} = (2M_i/m_e)^{1/2}(T_i/T_e)^{3/2}\tau_{ei}.$$

Отметим, что приведенные характерные времена отвечают разным процессам, ведущим к релаксации первоначально неравновесного распределения плазменных частиц к равновесному. В частности, время  $\tau_{ei}$  электрон-ионных столкновений отвечает времени торможения (точнее, потери направленной скорости) электронов в среде ионов, тогда как время  $\tau_{ie}$  отвечало бы времени торможения ионов на электронах. Очевидно, эти времена существенно различаются. Для наглядности представим, что мячик для настольного тенниса влетает в облако арбузов среднего размера; мячик будет долго метаться между арбузами, почти не сдвигая их с места. И наоборот, арбуз, влетающий в облако таких мячей, будет двигаться, практически не меняя направления, но расшвыривая мячи и замедляя свою скорость. В плазме частицы – заряженные, характер взаимодействия иной, но качественно картина аналогичная.

Таким образом, самое короткое из релаксационных времен – это время, за которое электроны теряют направленную скорость в столкновениях с ионами. Время максвеллизации электронной подсистемы, т. е. установления электронной температуры  $T_e$ , несколь-

ко больше, примерно в  $\sqrt{2}$  раз. Следующий по длительности процесс – максвеллизация ионной подсистемы плазмы. Длительность этого процесса, в течение которого устанавливается ионная температура  $T_i$ , примерно в  $\sqrt{M_i/m_e}$  ( $\sim 50$  для водородной плазмы) раз больше. В общем случае эти температуры могут оказаться различными. Для определения характерного времени электрон-ионной или ион-электронной релаксации по температуре, т. е. установления единой, как и должно быть при полном термодинамическом равновесии, температуры всех компонент плазмы, следует учесть, что из-за сильного различия масс при столкновении электрона и иона передается весьма малая доля энергии, порядка отношения масс,  $m_e/M_i$ . Поэтому этот процесс еще более длительный. В общем случае длительность этого процесса составляет [3]:

$$\tau_\varepsilon = \frac{3(m_e T_i + M_i T_e)^{3/2}}{8\sqrt{2\pi m_e M_i} n(Z_i e_e)^2 \Lambda}. \quad (1.57)$$

Например, в плазме, нагреваемой током, когда выделение джоулева тепла происходит главным образом в электронной подсистеме, быстрее всего установится температура электронов, затем температура ионов (ниже электронной) и очень долго будет устанавливаться (реально часто не успевает установиться) единая температура. В этом случае часто говорят о наличии «отрыва» электронной и ионной температур.

В формуле (1.57)  $T_e$  и  $T_i$  имеют смысл начальных температур на стадии, предшествующей процессу релаксации. Если предположить, что в процессе релаксации нет потерь энергии, то из ее сохранения следует, что после релаксации  $T = (T_e + T_i)/2$ .

Часто вместо характерного времени между столкновениями  $\tau$  используют соответствующую частоту столкновений  $\nu = \tau^{-1}$ .

В заключение приведем полезные формулы для практических расчетов [12]:

$$\begin{aligned}
\lambda_{e,i} &= 4.5 \cdot 10^5 \frac{T_e^2}{n\Lambda} \approx 3 \cdot 10^4 \frac{T_e^2}{n}; \\
\sigma_{e,i} &= 2 \cdot 10^{-6} \frac{\Lambda}{T_e^2} \approx 3 \cdot 10^{-5} T_e^{-2}; \\
\tau_{e,i} &= 0.67 \frac{T_e^{3/2}}{n\Lambda} \approx 4.5 \cdot 10^{-2} \frac{T_e^{3/2}}{n}; \\
\nu_{e,i} &= 1.5 \frac{n\Lambda}{T_e^{3/2}} \approx 22 \frac{n}{T_e^{3/2}}.
\end{aligned}
\tag{1.58}$$

При расчете числовых коэффициентов здесь принято значение  $\Lambda=15$ , типичное в термоядерных приложениях плазмы, концентрация выражена в кубических сантиметрах, а температура в градусах Кельвина. Например, для изотермической дейтериевой плазмы в оптимальных для термоядерного реактора условиях, когда температура и концентрация плазмы равны  $T=10^8\text{K}$ ,  $n=10^{14}\text{см}^{-3}$ , с помощью этих формул для длины свободного пробега и сечения кулоновских столкновений получаем следующие значения:

$$\lambda_{ei} \approx 3 \cdot 10^6 \text{см}, \quad \sigma_{ei} \approx 3 \cdot 10^{-22} \text{см}^2,$$

а характерные времена релаксационных процессов оказываются равными

$$\tau_{ei} \approx 4.5 \cdot 10^{-4} \text{с}, \quad \tau_{ee} \approx 6.4 \cdot 10^{-4} \text{с}, \quad \tau_{ii} \approx 0.04 \text{с}, \quad \tau_e \approx 0.8 \text{с}.$$

## § 10. Процессы переноса в плазме

Как и в обычном газе, при нарушении термодинамического равновесия в плазме могут происходить процессы переноса массы, импульса и энергии, т.е. явления диффузии, вязкого трения и теплопроводности. При наличии неоднородности плотности, скорости или температуры, возникают потоки, пропорциональные градиенту соответствующей величины. В плазме, содержащей свободные заряды, может появиться и пространственная неоднородность распределения заряда, и, следовательно, явление переноса заряда это электрический ток.

Напомним, что согласно обычному определению, коэффициент диффузии  $D$  связывает плотность потока частиц и градиент их концентрации

$$\vec{J} = -D\nabla n. \quad (1.59)$$

Плотность потока энергии (или поток тепла) определяется соотношением

$$\vec{q} = -\kappa\nabla T, \quad (1.60)$$

где  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности. Знак минус в правой части этих соотношений означает, что потоки массы и энергии направлены противоположно градиентам соответствующих величин, т.е. в сторону уменьшения концентрации и температуры.

Вязкое трение возникает в плазме, когда при ее движении с макроскопической скоростью  $\vec{u}$  в каком-либо одном направлении (например вдоль оси  $z$ ) существует поперечный к направлению потока градиент продольной скорости. При различии в скоростях двух соседних слоев плазмы возникает перенос импульса частиц, связанного с их направленным движением, поперек потока, что и приводит к появлению силы трения между слоями. Модуль этой силы определяется выражением

$$F = \eta \left| \frac{\partial u_z}{\partial x} \right| S,$$

где  $\eta$  - коэффициент вязкости,  $S$  - площадь некоторого выделенного элемента поверхности, перпендикулярного направлению переноса импульса. Отношение  $F/S$  представляет собой величину, называемую касательным напряжением. Для компоненты тензора касательного напряжения  $\tau_{xz}$ , которая в нашем случае представляет собой поток  $z$ -й составляющей импульса вдоль оси  $x$ , справедливо соотношение

$$\tau_{xz} = -\eta \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (1.61)$$

Напомним, что в теории случайных блужданий (например, в теории диффузии броуновских частиц в газе) коэффициент диффузии оценивается как

$$D \sim (\Delta x)^2 / \tau , \quad (1.62)$$

где  $\Delta x$  - среднее смещение частицы при хаотических блужданиях, а  $\tau$  - время между столкновениями. Для диффузии частиц в газе или плазме  $\Delta x$  соответствует средней длине свободного пробега  $\lambda$ . Учитывая, что  $\tau = \lambda/v_T$ , получаем

$$D \sim \lambda v_T ,$$

где  $v_T = \sqrt{3T/m}$  -средняя тепловая скорость частиц.

Элементарная кинетическая теория газов приводит к следующим выражениям для коэффициентов диффузии, вязкости и теплопроводности

$$D = \frac{1}{3} \lambda v_T , \quad (1.63)$$

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \lambda v_T = \rho D , \quad (1.64)$$

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho c_V \lambda v_T = c_V \eta \sim nD , \quad (1.65)$$

где  $\rho = mn$  -массовая плотность,  $c_V$  - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, Для одноатомных газов  $c_V = (3/2)(k/m)$  (если определять теплоемкость в системе СГС) Напомним, что температуру мы измеряем в энергетических единицах. Это означает, что во всех выражениях можно формально полагать постоянную Больцмана  $k$  равной единице.

Следует подчеркнуть, что выражения (1.63)- (1.65) получены для простого газа, образованного из одинаковых частиц массой  $m$ . В этом случае коэффициент  $D$  является по существу коэффициентом самодиффузии  $D_{11}$ , т.е. диффузией выделенных («меченых») частиц в среде собственных молекул. Под концентрацией  $n$  следует понимать в этом случае плотность именно этих меченых молекул (например радиоактивного изотопа в смеси практически одинаковых по массе молекул).

Поясним, как возникают соотношения (1.63)-(1.65) на примере вычисления диффузионного переноса частиц (самодиффузии) в газе. Пусть газ является слабонеоднородным вдоль одной координаты (например, вдоль координаты

ты  $x$ ). Рассмотрим плоскость, перпендикулярную оси  $x$ , и выделим на ней единичную площадку. Будем предполагать, что молекулы, летящие по направлению к этой площадке, претерпевают последние столкновения на расстоянии средней длины свободного пробега частиц  $\lambda$  и далее движутся к ней без столкновений. Учтем также, что при изотропном распределении молекул по направлению скоростей в заданном направлении движется в среднем  $1/6$  часть молекул. Тогда их поток определяется выражением  $N = (1/6)nv_T$ . Результирующая плотность потока частиц, пересекающих выделенную площадку в направлении оси  $x$ , определяется как разность потоков молекул, летящих с левой и правой стороны относительно площадки,

$$J_x = N^+ - N^- = \frac{1}{6}n(x - \lambda)v_T - \frac{1}{6}n(x + \lambda)v_T, \quad (1.66)$$

где координата  $x$  соответствует положению площадки.

При оценке средней длины свободного пробега  $\lambda \approx 1/n\sigma$  можно воспользоваться моделью молекул - твердых упругих шаров. В этом случае  $\sigma = \pi a^2$ , где  $a$  - диаметр шара. Для рассматриваемого слабо неоднородного состояния газа плотность  $n$  в выражении для средней длины свободного пробега, а следовательно и длину  $\lambda$ , можно приближенно полагать постоянными. Воспользуемся также малостью этой величины. Например, при нормальных условиях ( $T = 273K$  и  $p = 1$  атм) плотность газа равна числу Лошмидта  $n \approx 2.7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ , а  $\lambda$  имеет порядок  $10^6$  см., если  $a = 5\text{ \AA}$ . Это позволяет использовать приближенные разложения плотности в ряды вида

$$n(x - \lambda) \approx n(x) - \lambda \frac{\partial n}{\partial x}, \quad n(x + \lambda) \approx n(x) + \lambda \frac{\partial n}{\partial x},$$

и представить  $J_x$  (1.66) как

$$J_x \approx -\frac{1}{3}\lambda v_T \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (1.67)$$

Это выражение по своей структуре аналогично определению диффузионного потока (1.59), направленного вдоль оси  $x$ . Коэффициент пропорциональности в нем и есть коэффициент самодиффузии  $D_{11}$  (1.63).

Аналогичным образом можно получить выражение и для потока тепла  $q_x$ . Учитывая, что средняя энергия теплового движения частиц равна  $c_V mT$ , где  $T$  - температура газа, которая теперь меняется вдоль оси  $x$  (плотность  $n$  предполагается постоянной), находим

$$q_x = \frac{1}{6}\rho v_T c_V [T(x - \lambda) - T(x + \lambda)] \approx -\frac{1}{3}\rho c_V \lambda v_T \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Сравнение с (1.60) показывает, что смысл коэффициента теплопроводности имеет величина

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho c_V \lambda v_T \sim nD, \quad (1.68)$$

которая совпадает с определением (1.65).

Для получения тем же способом выражения для коэффициента вязкости рассматривается перенос импульса поперек потока газа (вдоль оси  $x$ ), который движется со скоростью  $u_z$  (вдоль оси  $z$ ). Площадка, через которую рассматривается перенос импульса, располагается в некотором положении  $x$ , перпендикулярно оси  $x$ . Рассматривая разность значений импульсов, переносимых из областей, отстоящих от площадки на расстояниях  $x - \lambda$  и  $x + \lambda$ , для результирующего потока импульса получаем

$$\tau_{xz} = -\frac{1}{3} \rho \lambda v_T \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (1.69)$$

Коэффициент пропорциональности в этом выражении соответствует коэффициенту вязкости  $\eta$ , определяемому формулой (1.64)

Получаемые в элементарной кинетической теории выражения для коэффициентов переноса дают правильные зависимости от основных параметров газа, отличаясь от точных значений лишь численными коэффициентами. При этом в соответствии с результатами строгой кинетической теории газа коэффициенты переноса для модели молекул – твердых упругих шаров – связаны соотношениями [50]:

$$\rho D = \frac{6}{5} \eta, \quad \kappa = \frac{5}{2} c_V \eta, \quad (1.70)$$

где

$$\eta = 0.354 \rho \lambda \langle v \rangle, \quad \lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{n\pi a^2}. \quad (1.71)$$

Из этих выражений следует, в частности, что коэффициенты вязкости и теплопроводности газа нейтральных частиц для рассмотренной выше модели молекул меняются с температурой пропорционально  $T^{1/2}$ . Для коэффициента самодиффузии имеем  $D \sim (1/p) T^{3/2}$ , где  $p$  – давление газа. Характер температурной зависимости может несколько меняться, если используются более реалистические модели взаимодействия молекул (например, потенциал Леннарда-Джонса). Подробную информацию по этому вопросу можно найти, например, в монографии [50].

## Вязкость плазмы

Для плазмы, образованной из электронов, ионов и нейтральных молекул, с существенно различающимися массами электронов и тяжелых частиц, анализ явлений переноса оказывается более сложным, чем в случае простого нейтрального газа. Однако ряд важных качественных выводов о характере зависимости электронных и ионных коэффициентов переноса от массы частиц и температур компонентов плазмы может быть сделан и на основе элементарных представлений.

Выражение для коэффициента вязкости (1.64), даваемое элементарной теорией, можно представить также в виде:

$$\eta = \frac{1}{3} mn \lambda v_T = \frac{1}{3} mn \tau v_T^2 = p \tau \quad , \quad p = nT \quad , \quad (1.72)$$

где  $\tau$  - характерное время свободного пробега между столкновениями (время релаксации).

Для слабоионизованной плазмы ее вязкость определяется главным образом взаимодействием нейтральных молекул, а вклад электронной и ионной вязкости оказывается малосущественным.

Принимая для оценок, что сечение взаимодействий молекулы  $\sigma = \pi a^2 = const$  , получаем

$$\eta \sim mn \frac{1}{n\sigma} \left( \frac{T}{m} \right)^{1/2} \sim m^{1/2} T^{1/2} . \quad (1.73)$$

Существенно, что вязкость не зависит от давления газа.

С ростом степени ионизации решающим становится роль кулоновских взаимодействий частиц. Нетрудно показать, что основной вклад в вязкость полностью ионизованной плазмы дает ионная компонента. Из-за малости массы электрона по сравнению с массой иона вклады электронной и ионной вязкости могут быть разделены [51]. Вклад ионов в вязкость определяется при этом временем релаксации для ионов  $\tau_{ii}$  (1.45), так что

$$\eta_i = p_i \tau_{ii} \sim M_i^{1/2} T_i^{5/2} / \Lambda . \quad (1.74)$$



Электронная вязкость определяется как электрон-электронными, так и электрон-ионными столкновениями. Поскольку, однако  $\tau_{ee} = \sqrt{2}\tau_{ei}$ , то с учетом выражения для  $\tau_{ee}$  (1.44) имеем

$$\eta_e \sim m_e^{1/2} T_e^{5/2} / \Lambda. \quad (1.75)$$

Очевидно, что при  $T_e = T_i$

$$\eta_e / \eta_i = (m_e / M_i)^{1/2} \ll 1,$$

поэтому вкладом электронной вязкости в полную вязкость плазмы можно пренебречь. Однако ее вклад может оказаться сравнимым с вязкостью ионов для неизотермической плазмы при  $T_e \gg T_i$ , если выполнено условие  $T_e / T_i \sim (M_i / m_e)^{1/5}$ .

Существенно, что в соответствии с (1.74) ионная вязкость гораздо сильнее зависит от температуры, чем вязкость нейтральной компоненты. Отметим, что коэффициенты вязкости ионов и электронов для полностью ионизованной плазмы, получаемые методами строгой кинетической теории, даются выражениями [51]:

$$\eta_i = 0.96 n_i T_i \tau_{ii}, \quad \eta_e = 0.73 n_e T_e \tau_{ei}. \quad (1.76)$$

### **Теплопроводность плазмы**

Теплопроводность слабоионизованной плазмы определяется переносом тепла только нейтральными частицами. В соответствии с (1.65)

$$\kappa \sim \eta / m \sim (p / m) \tau \sim m^{-1/2} T^{1/2}. \quad (1.77)$$

С ростом степени ионизации и возрастанием роли кулоновских столкновений существенный вклад начинает вносить теплопроводность, обусловленная электронами. Соответствующие оценки, основанные на (1.77) и выражениях для  $\tau_{ee}$  (1.44) и  $\tau_{ii}$  (1.45), дают

$$\kappa_e \sim m_e^{-1/2} T_e^{5/2} / \Lambda, \quad \kappa_i \sim M_i^{-1/2} T_i^{5/2} / \Lambda. \quad (1.78)$$

При  $T_e = T_i$  имеем

$$\kappa_i / \kappa_e = (m_e / M_i)^{1/2} \ll 1.$$

Это означает, что основной вклад в теплопроводность полностью ионизованной плазмы вносит электронная теплопроводность. Вклад теплопроводности ионов может оказаться сравнимым с электронной теплопроводностью для неизотермической плазмы с  $T_i > T_e$  при выполнении условия  $T_i / T_e \sim (M_i / m_e)^{1/5}$ .

Коэффициенты теплопроводности, получаемые в строгой кинетической теории, имеют вид [51,52]

$$\kappa_e = 3.16 n_e T_e \tau_{ei} / m_e, \quad \kappa_i = 3.9 n_i T_i \tau_{ii} / M_i. \quad (1.79)$$

Различие в числовых коэффициентах, даваемых элементарной и строгой теорией, оказывается в этом случае большим, чем при вычислении вязкости плазмы, однако основные качественные зависимости полностью сохраняются.

### *Диффузия в плазме*

Прежде чем перейти к рассмотрению диффузии и оценкам коэффициентов диффузии в плазме, дадим более четкое определение понятия плотности диффузионного потока частиц сорта  $k$ , где индекс  $k$  может соответствовать электронам, ионам и нейтральным частицам ( $k = e, i, a$ ). Диффузионные потоки данного компонента связаны с направленным движением его частиц в какой-либо заданной системе отсчета. Обычно выбирают систему отсчета, связанную с так называемой среднемассовой скоростью плазмы

$$\bar{u} = \frac{1}{\rho} \sum_k n_k m_k \bar{u}_k, \quad \rho = \sum_k n_k m_k. \quad (1.80)$$

Здесь  $m_k$ ,  $n_k$  и  $\bar{u}_k$  -соответственно масса, плотность (концентрация) и средняя направленная скорость частиц  $k$ -го компонента плазмы. Выбор такой системы отсчета удобен, поскольку именно среднемассовая скорость входит в уравнения магнитной гидродинамики плазмы (см. главу 3). Для слабоионизованной плазмы

( $n_e, n_i \ll 1$ ) скорость  $\bar{u}$  фактически совпадает со скоростью нейтрального компонента  $\bar{u}_a$ . Для полностью ионизованной плазмы из-за условия  $m_e \ll M_i$  эта скорость практически равна скорости ионов  $\bar{u}_i$ .

Плотность диффузионного потока частиц  $k$ -го компонента (будем называть ее просто *диффузионным потоком*) определяется как

$$\bar{J}_k = n_k (\bar{u}_k - \bar{u}). \quad (1.81)$$

Пусть концентрации компонентов  $n_k$  меняются вдоль оси  $x$ . Если к плазме приложено еще электрическое поле  $\bar{E}$ , то диффузионный поток  $k$ -го компонента вдоль направления  $x$  может быть представлен в виде:

$$J_k = -D_k \frac{dn_k}{dx} + Z_k \mu_k n_k E. \quad (1.82)$$

Здесь  $D_k$  и  $\mu_k$  - соответственно коэффициенты диффузии и подвижности  $k$ -го компонента в плазме,  $Z_k$  - кратность заряда (зарядовое число), для электронов  $Z_e = -1$ . Из общих термодинамических соображений можно показать, что коэффициенты диффузии и подвижности связаны соотношением Эйнштейна:

$$\mu_k = \frac{e}{T} D_k. \quad (1.83)$$

Элементарная кинетическая теория, основанная на понятии средней длины свободного пробега (см. начало этого раздела), дает возможность получить выражение для коэффициента диффузии только для случая так называемой самодиффузии, когда массы частиц газа примерно одинаковы. Поэтому вопрос о диффузии частиц в плазме мы рассмотрим на основе другого приближенного подхода, который можно назвать “методом баланса импульса”.

Суть этого метода состоит в следующем. Предполагается, что для установившихся во времени процессов переноса частиц в плазме может быть записано некоторое уравнение баланса, в кото-

ром силы, действующие в выделенном объеме плазмы на частицы  $k$ -го компонента за счет неоднородности концентрации (парциального давления) и благодаря наличию электрического поля, уравниваются силами трения, действующими в среднем на частицы данного компонента со стороны частиц других компонентов плазмы. Последняя величина носит название *диффузионной силы трения* и равна, очевидно, усредненной величине суммарного импульса, передаваемого в столкновениях частиц данного сорта с частицами других сортов. Уравнение баланса импульса для  $k$ -го компонента плазмы можно представить в виде [51,53]:

$$-\frac{dp_k}{dx} + n_k Z_k eE = R_k, \quad (1.84)$$

$$R_k = -\sum_j n_k \mu_{kj} v_{kj} (u_k - u_j). \quad (1.85)$$

Поясним физический смысл отдельных членов, входящих в уравнение (1.84). Выделим в плазме малый цилиндрический объем толщиной  $dx$  с поперечным сечением  $S$ . Сила, действующая на выделенный элемент за счет градиента парциального давления  $k$ -го компонента, равна, очевидно,

$$[p_k - (p_k + dp_k)]S = -Sdp_k = \left(-\frac{dp_k}{dx}\right)Sdx.$$

В отсутствие электрического поля эта величина уравнивается силой диффузионного трения, равной  $R_k Sdx$ , где  $R_k$  равна силе диффузионного трения, возникающей в единице объема плазмы. В результате  $-(dp_k/dx) = R_k$ , где левая часть этого соотношения есть действующая на частицы  $k$ -го компонента сила, возникающая в единице объема плазмы за счет пространственной неоднородности концентрации компонента. Учитывая также силы электрического поля, действующие в том же единичном объеме, приходим к уравнению (1.84).

Вывод выражения для диффузионной силы трения  $R_k$  (1.85) рассматривался в [51,53]. Из общих соображений ясно, что средняя передача импульса при столкновениях частиц должна быть пропорциональна разности направленных скоростей компонентов. Для компонентов, движущихся с одинаковыми скоростями, она отсутствует (при столкновениях частиц одного сорта импульс в среднем не передается). Кроме того, очевидно, что эта величина должна

быть пропорциональна плотности частиц  $k$ -го компонента и средней частоте столкновений  $\nu_{kj}$  с частицами других сортов. Приведенная масса  $\mu_{kj}$  появляется в выражении, поскольку столкновения частиц при вычислении  $R_k$  рассматриваются в системе отсчета, связанной с их центром масс.

Обратимся к случаю слабоионизованной плазмы. Уравнения баланса импульса для электронов и ионов (с кратностью заряда  $Z$ ) в плазме можно представить в виде

$$\begin{aligned} -\frac{dp_e}{dx} - n_e e E &= -n_e m_e \nu_{ea} (u_e - u_a), \\ -\frac{dp_i}{dx} + n_i Z e E &= -n_i \mu_{ia} \nu_{ia} (u_i - u_a). \end{aligned} \quad (1.86)$$

Здесь учитывается, что  $\mu_{ea} \approx m_e$ , заметим, что для ионов и атомов одинаковой массы  $\mu_{ia} = m_a/2$ . Мы полагаем, что градиент полного давления  $dp/dx = 0$ . Это позволяет нам не выписывать уравнение баланса для нейтральных частиц, поскольку в силу квазинейтральности плазмы суммирование его с уравнениями (1.86) дает слева и справа тождественный нуль, т.е. это уравнение не является независимым.

Диффузионные потоки в рассматриваемом нами случае определены как

$$J_e = n_e (u_e - u_a), \quad J_i = n_i (u_i - u_a).$$

Тогда с использованием (1.86) получаем

$$J_e = -D_e \frac{dn_e}{dx} - \mu_e n_e E, \quad (1.87)$$

$$J_i = -D_i \frac{dn_i}{dx} + Z \mu_i n_i E, \quad (1.88)$$

где использованы соотношения  $p_e = n_e T_e$  и  $p_i = n_i T_i$ . Для коэффициентов диффузии получаем

$$D_e = \frac{T_e}{m_e \nu_{ea}}, \quad D_i = \frac{T_i}{\mu_{ia} \nu_{ia}}. \quad (1.89)$$

Коэффициенты подвижности  $\mu_e$  и  $\mu_i$  выражаются через  $D_e$  и  $D_i$  с помощью соотношения (1.83).

Средние частоты упругих столкновений электронов и ионов с атомами можно определить как

$$v_{ea} = n_a \langle \sigma_{ea}(g)g \rangle, \quad v_{ia} = n_a \langle \sigma_{ia}(g)g \rangle, \quad (1.90)$$

где  $g$  - модуль относительной скорости частиц, а  $\langle \rangle$  означает усреднение по максвелловскому распределению частиц по скоростям. Для модели твердых упругих шаров  $v_{ea} \approx n_a \sigma_{ea} v_{eT}$ ,  $v_{ia} \approx n_a \sigma_{ia} v_{iT}$  и мы приходим к оценкам

$$D_e \sim \frac{T_e^{3/2}}{m_e^{1/2} \sigma_{ea}}, \quad D_i \sim \frac{T_i^{3/2}}{M_i^{1/2} \sigma_{ia}}. \quad (1.91)$$

Как видно, при  $T_e = T_i$  и  $\sigma_{ea} \sim \sigma_{ia}$  имеем  $D_i/D_e \sim (m_e/M_i)^{1/2}$ , т.е. коэффициент диффузии электронов (и соответственно подвижность) в слабоионизованной плазме оказывается во много раз больше коэффициента диффузии (подвижности) ионов.

В случае полностью ионизованной плазмы достаточно записать одно уравнение баланса вида

$$-\frac{dp_e}{dx} - n_e e E = -n_e m_e v_{ei} (u_e - u_i). \quad (1.92)$$

Здесь  $v_{ei} = 1/\tau_{ei}$ , где  $\tau_{ei} = (1/\sqrt{2})\tau_{ee}$ , а  $\tau_{ee}$  определено выражением (1.53). В результате диффузионный поток электронов  $J_e = n_e (u_e - u_i)$  определяется как

$$J_e = -D_{ei} \frac{dn_e}{dx} - \mu_e n_e E, \quad (1.93)$$

где

$$D_{ei} = \frac{3}{4\sqrt{2}\pi} \frac{T_e^{5/2}}{n_e e^4 m_e^{1/2} \Lambda}, \quad \mu_e = \frac{e}{T_e} D_{ei}. \quad (1.94)$$

В отличие от случая слабоионизованной плазмы коэффициент диффузии  $D_{ei}$ , который определяется кулоновскими взаимодействиями частиц, очень сильно зависит от температуры.

Как уже отмечалось, коэффициенты диффузии электронов и ионов (1.89) в слабоионизованной плазме сильно различаются. Электроны, имеющие больший коэффициент диффузии, должны, казалось бы, быстрее уходить из мест, где плотность плазмы больше. Однако уход электронов приведет к появлению в плазме пространственного заряда и связанного с ним электрического поля, тормозящего их уход и ускоряющего уход ионов. В результате диффузия плазмы в целом будет происходить быстрее ионной диффузии, возникает так называемая *амбиполярная диффузия*.

Определим коэффициент амбиполярной диффузии, учитывая, что в установившемся движении диффузионные потоки электронов и ионов в соответствии с выражениями (1.87), (1.88) будут определяться как обычной диффузией, так и подвижностью заряженных частиц в возникающем электрическом поле.

Так как плазма в целом квазинейтральна, то, полагая  $Z = 1$ , можно принять, что  $n_e = n_i = n$  и  $\frac{dn_i}{dx} = \frac{dn_e}{dx} = \frac{dn}{dx}$ . Полагая в установившемся состоянии  $J_e = J_i = J$ , и исключив поле  $E$  из уравнений (1.87) и (1.88), обнаружим, что плотность потока частиц плазмы пропорциональна градиенту ее концентрации:

$$J = -\frac{D_i\mu_e + D_e\mu_i}{\mu_i + \mu_e} \frac{dn}{dx} = -D_a \frac{dn}{dx}. \quad (1.95)$$

Коэффициент пропорциональности между плотностью потока частиц и градиентом концентрации и есть коэффициент амбиполярной диффузии:

$$D_a = \frac{D_i\mu_e + D_e\mu_i}{\mu_i + \mu_e}. \quad (1.96)$$

Используя соотношение Эйнштейна (1.83), а также учитывая, что  $D_e \gg D_i$ , получаем

$$D_a = D_i \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right). \quad (1.97)$$

Очевидно, имеет место неравенство  $D_i < D_a \ll D_e$ , как и должно быть, согласно логике наших рассуждений. Амбиполярное электрическое поле усиливает перенос ионной компоненты плазмы и,

тем самым, эффективно увеличивает коэффициент диффузии плазмы в целом по сравнению с коэффициентом диффузии ионов; для - более подвижного компонента плазмы - электронов - ситуация оказывается обратной. Для изотермической плазмы ( $T_e = T_i$ ) получаем, что коэффициент амбиполярной диффузии вдвое превышает коэффициент диффузии ионов.

### ***Проводимость (электропроводность)***

Так как плазма содержит свободные заряды, то при наложении внешнего электрического поля в плазме возникает перенос заряда. Это явление называют проводимостью (электропроводностью). По определению плотность тока в плазме  $\vec{j} = \sum_k n_k e_k \vec{u}_k$ . Для плазмы, содержащей электроны и один вид ионов, с учетом условия квазинейтральности получаем

$$\vec{j} = -n_e e (\vec{u}_e - \vec{u}_i). \quad (1.98)$$

Для полностью ионизованной плазмы выражение для разности скоростей  $(\vec{u}_e - \vec{u}_i)$  следует из уравнения баланса импульса (1.92). В результате получаем

$$j = \sigma \left( E + \frac{1}{n_e e} \frac{dp_e}{dx} \right), \quad (1.99)$$

где  $\sigma$  - коэффициент электропроводности (проводимость) плазмы

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_{ei}} = \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_{ei}. \quad (1.100)$$

Этот же результат можно получить непосредственно из выражения (1.93), имея в виду, что  $j = -eJ_e$ . В этом случае

$$\sigma = n_e e \mu_e = \frac{n_e e^2}{T_e} D_{ei}. \quad (1.101)$$

Используя выражение для  $\tau_{ei}$  (1.58), мы обнаруживаем, что



$$\sigma \sim \frac{T_e^{3/2}}{\sqrt{m_e} \Lambda}.$$

Расчеты на основе строгой кинетической теории дают для коэффициента электропроводности при  $Z=1$  следующее выражение [2,3]:

$$\sigma = 1.975 \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_{ei}. \quad (1.102)$$

Если вместо проводимости использовать обратную ей величину – удельное сопротивление  $\hat{\rho} \equiv 1/\hat{\sigma}$ , то в удобном для расчета виде ее можно записать как

$$\hat{\rho}[\text{Ом} \cdot \text{м}] = 1,65 \cdot 10^{-9} Z_{\text{эфф}} \Lambda T_e^{-3/2} [\text{кэВ}]. \quad (1.103)$$

Здесь  $Z_{\text{эфф}}$  – эффективный заряд

$$Z_{\text{эфф}} = \frac{\sum_k \alpha_k Z_k^2}{\sum_k \alpha_k Z_k}, \quad (1.104)$$

где  $\alpha_k$  относительная концентрация ионов с зарядом  $k$ . Интересно отметить, что при температуре  $T \sim 1 \text{кэВ}$  для чисто водородной плазмы ( $Z_{\text{эфф}}=1$ ) выражение (1.78) дает удельное сопротивление плазмы на уровне сопротивления меди при комнатной температуре ( $\hat{\rho}_{\text{Cu}20^\circ\text{C}} = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{Ом} \cdot \text{м}$ ).

В случае слабоионизованной плазмы для определения плотности тока при  $Z=1$  ( $n_e = n_i$ ) можно использовать соотношение

$$j = -e(J_e - J_i)$$

Учитывая, что  $\mu_e \gg \mu_i$  и используя соотношение  $\sigma = n_e e \mu_e$ , находим

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_{ea}}. \quad (1.105)$$

Если переписать (1.100) в виде

$$\hat{\rho} = \frac{m_e}{ne^2} v_{ei},$$

то легко представить, как меняется сопротивление плазмы, если наряду с заряженными частицами электроны сталкиваются и с нейтральными, тогда

$$\hat{\rho} = \frac{m_e}{ne^2} (v_{ei} + v_{ea}), \quad (1.106)$$

и, сопротивление плазмы растет подобно тому, как примеси повышают сопротивление чистого металла.

Следует учесть и еще одно чрезвычайно важное обстоятельство. А именно, напомним что с увеличением энергии электрона сечение его кулоновского рассеяния на ионе быстро, обратно пропорционально квадрату энергии, убывает. С увеличением энергии электрона быстро увеличивается время его движения между соударениями ( $\sim v^{-3}$ ), следовательно, электрон между соударениями успевает набрать во внешнем поле импульс, превышающий импульс, отвечающий его тепловому движению. Критерий возникновения такой ситуации можно сформулировать следующим образом:

$$eE\tau > m_e v_{eT}.$$

При выполнении этого условия часть электронов плазмы попадает, как говорят, в режим «падающего трения», когда действующая на них эффективная сила трения уменьшается с ростом их энергии. В результате передача энергии ионам при столкновениях не может ограничить набор электронами энергии во внешнем поле, так что часть электронов может перейти в режим непрерывного ускорения. Это явление наблюдается на практике, и такие электроны получили название "просвистных" или "убегающих" электронов. Если считать, что  $\tau = \tau_{ei}$ , то можно определить некоторое предельное значение поля  $E_{кр}$ , так называемое *поле Драйсера*, выше которого электроны начнут "уходить в просвист", т.е. будут непрерывно ускоряться:

$$E > E_{кр} \approx 0.214 \Lambda e^2 / r_D^2. \quad (1.107)$$

Практически заметная часть электронов плазмы начинает «уходить в просвист» уже при  $E > 0.1E_{кр}$ .

## § 11. Диэлектрическая проницаемость плазмы

Поместим плазму во внешнее переменное электрическое поле и попытаемся проследить изменение ее свойств, постепенно увеличивая его частоту. Статическое внешнее поле, как мы уже знаем, проникает в плазму на толщину масштаба дебаевского слоя. Это вытекает из уравнения экранировки (см. §2), которое, например, для одномерного случая записывается в виде:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\varphi}{r_{De}^2}.$$

Здесь  $r_{De}$  – электронный дебаевский радиус. Удобно переписать это уравнение, используя представление Фурье  $\varphi \sim \varphi_k \exp(ikx)$ , где  $k$  – волновое число. Результат для амплитуды гармоник  $\varphi_k$ , как легко проверить, будет следующим:

$$k^2 \left(1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2}\right) \varphi_k = 0.$$

Сравним это уравнение с уравнением для индукции электрического поля

$$\frac{dD}{dx} = 0.$$

Для Фурье-гармоники его можно записать в следующем виде:

$$k^2 \varepsilon_k \varphi_k = 0,$$

где  $\varepsilon_k$  – диэлектрическая проницаемость плазмы, описывающая отклик плазмы на статическое воздействие. Как видим из сравнения, диэлектрическая проницаемость оказывается равной

$$\varepsilon_k = 1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2}.$$

Отклик плазмы на статическое воздействие оказывается вполне эквивалентен эффекту поляризации обычного диэлектрика, помещенного во внешнее поле, хотя, конечно, механизм поляризации иной: если дебаевский радиус мал по сравнению с характерной

длиной волны, то диэлектрическая проницаемость оказывается очень большой и поле в плазму, фактически, не проникает.

При низких, но ненулевых, частотах качественно картина не изменится: заряды будут экранировать внешнее поле в слоях масштаба дебаевских. Плазма будет вести себя как проводник – внешнее поле в нее не будет проникать. Но если частота поля велика и превышает плазменную частоту, то картина качественно изменится: электроны из-за инерции не будут успевать подстраиваться под колебания поля, они будут осциллировать около некоторого среднего положения. В результате поле сможет проникнуть в плазму. По этой причине, в противоположность случаю низких частот, проникающее в плазму поле можно считать однородным. Чтобы найти диэлектрическую проницаемость плазмы в этом пределе высоких частот, будем считать переменное поле гармоническим:

$$\tilde{E} = E_0 e^{i\omega t}.$$

Смещение  $x$  электрона из положения равновесия под действием такого поля можно определить из уравнения движения

$$m_e (\ddot{x}) = e\tilde{E} = eE_0 e^{i\omega t},$$

$$x = -\frac{e}{m\omega^2} \tilde{E}.$$

Подсчитаем теперь индукцию поля в плазме

$$\tilde{D} = \varepsilon_\omega \tilde{E} = \tilde{E} + 4\pi P,$$

где  $P = nex$  – дипольный момент единицы объема плазмы, обусловленный смещением электронов на расстояние  $x$ . Произведя подстановку, получим величину диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_\omega = 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2, \quad \omega_p = \frac{4\pi n e^2}{m_e}, \quad (1.108)$$

описывающей отклик плазмы на высокочастотное однородное поле.

Полученную формулу для диэлектрической проницаемости можно использовать и при рассмотрении воздействия на плазму электромагнитной волны, закон дисперсии которой определяет уравнение

$$N^2 = \varepsilon. \quad (1.109)$$

где  $N=kc/\omega$ . Из (1.82) очевидно, что высокочастотные волны с частотой  $\omega > \omega_p$  могут проникать в плазму и распространяться в ней, так как для них будет  $N^2 > 0$ . При  $\omega < \omega_p$  диэлектрическая проницаемость отрицательна, так что для электромагнитной волны с такой частотой коэффициент преломления оказывается чисто мнимым, т.е. поперечная волна не может распространяться в плазме. Однако в этих условиях возможно распространение в плазме продольных – так называемых ленгмюровских волн.

Как видим, в статическом пределе и в высокочастотном пределе диэлектрическая проницаемость плазмы описывается различными формулами. В действительности, обе они являются предельными случаями более общей формулы

$$\epsilon_{k,\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2 T / m_e},$$

объединяющей оба предельных случая.

## ГЛАВА 2

### ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

#### § 12. Одночастичное рассмотрение

Суть одночастичного рассмотрения, или приближения, в описании плазменных процессов сводится к изучению движения отдельных частиц плазмы в полях, которые считаются заданными изначально. Тем самым пренебрегается влиянием движения частиц плазмы на поля «управляющие» их движением, т.е. пренебрегается эффектами самосогласования движения частиц и вызываемого им изменения поля. В качестве первого шага такое приближение вполне оправдано и повсеместно используется, особенно, если есть возможность, по крайней мере, эффективно учесть влияние полей остальных частиц плазмы на движение какой-либо одной выделенной частицы. Подчеркнем, вместе с тем, что недоучет эффектов самосогласования содержит в себе множество неприятных «сюрпризов», и в истории развития исследований в области управляемого термоядерного синтеза таких примеров предостаточно. Например, в классических аксиально-симметричных адиабатических ловушках (см. §18), прекрасно удерживающих отдельные частицы плазмы очень низкой плотности, одночастичное приближение вполне оправдано. С повышением плотности плазмы, когда все большую роль начинают играть ее собственные поля, появляется неустойчивость, и удержание плотной плазмы без дополнительных усилий просто невозможно.

В общем случае уравнение движения заряженной частицы в заданных внешних полях имеет вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \vec{B} + \vec{F}, \quad (2.1)$$

где первое слагаемое справа отвечает силе со стороны электрического поля, второе описывает силу со стороны магнитного поля (сила Лоренца), а последнее обозначает равнодействующую прочих внешних сил, которые могут действовать на частицу.

Уравнение (2.1) может быть проинтегрировано только в отдельных, наиболее простых случаях. Это понятно, если учесть, что

действующие на частицу поля являются функциями координат и времени и, кроме того, что они сами связаны уравнениями Максвелла. Поэтому рассмотрим наиболее простые, часто встречающиеся случаи. Так, действием внешних, неэлектрических сил, обычно можно пренебречь, а электрическое поле часто отсутствует. Это соответствует движению заряженной частицы в постоянном во времени магнитном поле. Рассмотрим сначала движение в однородном поле, т.е. не меняющемся в пространстве.

### § 13. Движение в постоянном и однородном магнитном поле

В случае, если других сил, кроме силы Лоренца нет, то уравнение (2.1) имеет вид

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.2)$$

Умножая скалярно правую и левую части уравнения (2.2) на скорость, учитывая, что сила Лоренца перпендикулярна к обоим векторам, входящим в векторное произведение (2.2), получим соотношение

$$m\vec{v}\dot{\vec{v}} \equiv \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = 0.$$

Следовательно, кинетическая энергия частицы сохраняется:

$$\frac{mv^2}{2} = \text{const}. \quad (2.3)$$

Это означает, что постоянное во времени магнитное поле не производит работы над частицей. Следовательно, модуль скорости частицы, заданный начальными условиями, сохраняет постоянное значение.

Разложив вектор скорости на компоненты: параллельную  $\vec{v}_{\parallel} = \vec{B}(\vec{v}\vec{B})/B^2$  магнитному полю и перпендикулярную  $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$  к магнитному полю, получим для продольного ускорения:

$$m\dot{\vec{v}}_{\parallel} = \frac{e}{c} \frac{(\vec{v}\vec{B})}{B^2} (\vec{B} \times \vec{B}) \equiv 0,$$

т.е. постоянное и однородное магнитное поле не меняет продольную компоненту скорости, следовательно,

$$v_{\parallel} = (\vec{v}\vec{B}) / B = const. \quad (2.4)$$

Для поперечного ускорения получаем

$$m\dot{v}_{\perp} = \frac{q}{c} \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}, \quad (2.5)$$

и, как мы видим, поперечная компонента меняется только по направлению. Следовательно, частица равномерно движется вдоль силовой линии поля, вращаясь при этом вокруг силовой линии по окружности с постоянной угловой скоростью. Определим радиус этой окружности  $\rho$  и угловую скорость вращения  $\omega$ .

Так как  $\dot{v}_{\perp}$  является центростремительным ускорением, то, вспомнив определение величины модуля центростремительного ускорения – отношение квадрата скорости вращения к радиусу окружности, или произведение квадрата угловой скорости на радиус окружности, – можем записать

$$m|\dot{v}_{\perp}| = \frac{mv_{\perp}^2}{\rho} = \frac{q}{c} vB = m\rho\omega^2.$$

Откуда и получаем требуемые нам величины

$$\omega = \omega_{\text{ларм}} \equiv \frac{qB}{mc}; \quad (2.6)$$

$$\rho = \rho_{\text{ларм}} \equiv \frac{v_{\perp}}{\omega_{\text{ларм}}} = \frac{mcv_{\perp}}{qB} \quad (2.7)$$

Радиус  $\rho_{\text{ларм}}$  называют *ларморовским радиусом* частицы, а угловую скорость  $\omega_{\text{ларм}}$  – *ларморовской* или *циклотронной частотой* вращения частицы (для этих величин употребительны и другие обозначения, например, с индексом “B”:  $\rho_B$  и  $\omega_B$ , подчеркивающие в явном виде, что они относятся к случаю движения частицы в магнитном поле). Из соотношений (2.6) и (2.7) видно, что циклотронная частота зависит от массы и заряда частицы, напряженности магнитного поля, но не зависит от величины скорости вращающейся в поле частицы, а ларморовский радиус зависит от составляющей скорости, перпендикулярной к магнитному полю, причем с увеличением ее он возрастает прямо пропорционально. Следует отметить, что вектор угловой скорости положительно заряженной частицы антипараллелен, а отрицательно заряженной частицы (например, электрона) – параллелен магнитному полю. Так как движе-



ние частицы по окружности можно уподобить круговому току  $j = q\omega/2\pi$ , то вращению частицы в магнитном поле можно сопоставить магнитный момент, равный магнитному моменту этого кругового тока:

$$\vec{\mu} = \frac{j}{c} \vec{S}. \quad (2.8)$$

Здесь  $\vec{S}$  - соответственно ориентированная площадь круга, охватываемая ларморовской окружностью, равная  $S = \pi\rho^2$ . Подставляя значения  $j$  и  $S$  в уравнение (2.8), получаем

$$\vec{\mu} = -\mu \frac{\vec{B}}{B}, \quad \mu = \frac{mv_{\perp}^2 / 2}{B}. \quad (2.9)$$

Магнитный момент вращающейся в магнитном поле частицы всегда направлен против магнитного поля, следовательно, положительно и отрицательно заряженные частицы вращаются в противоположных направлениях (рис. 2.1). В общем случае траектория движения частицы в постоянном и однородном магнитном поле представляет собой спираль.

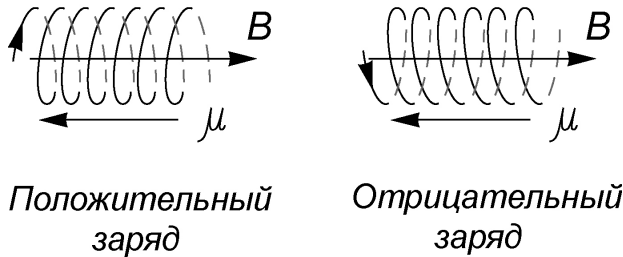


Рис.2.1. Движение заряженных частиц в постоянном магнитном поле (продольная скорость направлена вдоль магнитного поля в обоих случаях)

Конкретное направление вращения частицы в магнитном поле соответствует известному «правилу Ленца», согласно которому, любая механическая система стремится двигаться так, чтобы противодействовать причине, вызывающей ее движение. Вращающаяся по ларморовской окружности частица ведет себя как диамагнетик – она стремится ослабить охватываемый её ларморовской окружностью поток внешнего магнитного поля. Это выражает суть так называемого *принципа диамагнетизма свободных частиц*.

Возникает «законный» вопрос: если бы вращение частицы по ларморовской окружности вызывало изменение магнитного поля, в котором она вращается, то это должно было бы сказываться на траектории её движения, а изменение траектории в свою очередь привело бы к дополнительному искажению поля и т.д. В действительности, это ложный путь. В электродинамике постулируется, что точечные заряженные частицы взаимодействуют друг с другом через посредством электромагнитного поля, создаваемого ими в окружающем пространстве, тем самым «самодействие» частиц исключается. Например, в рассмотренном случае движения выделенной частицы в заданном магнитном поле предполагается, что это поле создается другими, движущимися заданным образом заряженными частицами, здесь унесенными на бесконечность. По этой причине влиянием рассматриваемой частицы на движение источников магнитного поля можно пренебречь, – а только так, влияя на траектории этих источников, и затрачивая соответствующую энергию, частица могла бы «управлять» своей траекторией.

## § 14. Движение в сильном медленно меняющемся поле.

### Дрейфовое приближение

Если магнитное поле медленно меняется в пространстве и во времени, то, движущаяся в нем частица, прежде чем почувствует влияние изменения поля, совершит в нем множество ларморовских оборотов, навиваясь на силовую линию магнитного поля. Это движение, фактически в постоянном поле, мы уже изучили. Поэтому можно рассматривать движение не собственно частицы, а её мгновенного центра вращения, так называемого ведущего центра (в зарубежной литературе такой подход известен как *приближение ведущего центра* - *guiding center approximation*). Следует, однако, иметь в виду, что в случае, если магнитное поле меняется во времени, то нужно учитывать и слабые электрические поля. Согласно уравнениям Максвелла, в силу

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

переменное во времени магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля.

На медленное движение ведущего центра, определяемого как продольной скоростью частицы, так и влиянием слабого электрического поля и слабых неоднородностей магнитного поля, наложится быстрое вращение частицы вокруг силовых линий магнитного поля. Такое раздельное рассмотрение быстрого вращения частицы по ларморовской окружности и медленного «дрейфа» центра

этой окружности будет справедливо, если изменение ларморовского радиуса на одном обороте будет существенно меньше самого ларморовского радиуса. Это условие, очевидно, будет выполнено, если характерное время изменения полей будет значительно больше времени ларморовского оборота, и если характерный пространственный масштаб изменения полей будет значительно превышать ларморовский радиус:

$$\Delta t_{\text{поля}}^{\text{хар}} \gg T_{\text{ларм}}, \quad \Delta l_{\text{поля}}^{\text{хар}} \gg \rho_{\text{ларм}}.$$

Количественно эти критерии можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial B / \partial t}{\omega_{\text{ларм}} B} \right| \ll 1, & \quad \left| \frac{\partial E / \partial t}{\omega_{\text{ларм}} E} \right| \ll 1, \\ \left| \rho_{\text{ларм}} \frac{\nabla B}{B} \right| \ll 1, & \quad \left| \rho_{\text{ларм}} \frac{\nabla E}{E} \right| \ll 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Очевидно, эти условия выполнены тем лучше, чем больше величина напряженности магнитного поля, так как ларморовская частота вращения частицы возрастает прямо пропорционально величине магнитного поля, а ларморовский радиус убывает обратно пропорционально величине магнитного поля. Вместе с тем, величина напряженности электрического поля  $E$  не должна быть слишком большой. На одном обороте частицы ее скорость должна меняться незначительно, настолько незначительно, чтобы выполнялось условие

$$\delta v \sim \frac{qE}{m} T_{\text{ларм}} \sim \frac{qE}{m \omega_{\text{ларм}}} \equiv c \frac{E}{B} \ll v.$$

Откуда и получаем требуемое ограничение на величину напряженности электрического поля

$$E \ll \frac{v}{c} B. \quad (2.11)$$

При выполнении условий (2.10) и (2.11) истинная траектория частицы обычно представляет собой медленно изгибающуюся спираль с медленно меняющимся радиусом и шагом. Проекция траектории частицы на плоскость, перпендикулярную к силовым линиям магнитного поля, представляет собой трохойду.

Движение ведущего центра обычно называют *дрейфовым движением*, а приближенное описание движения частицы как движение ведущего центра - *дрейфовым приближением*. Рассмотрим некоторые случаи, представляющие общий интерес, так как к ним можно свести многие виды движения заряженных частиц в неоднородных магнитных полях и в полях других внешних сил.

### § 15. Движение частицы в однородном магнитном поле под действием постоянной силы

Если на частицу, помимо силы Лоренца, действует постоянная сила  $\vec{F}$ , то уравнение движения частицы имеет вид:

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} + \vec{F}. \quad (2.12)$$

Разложив векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{F}$  на перпендикулярную и параллельную магнитному полю компоненты, как это уже делалось в предыдущем параграфе, определим, что

$$m\dot{\vec{v}}_{\parallel} = \vec{F}_{\parallel}, \quad m\dot{\vec{v}}_{\perp} = \vec{F}_{\perp} + \frac{q}{c} \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}. \quad (2.13)$$

Мы видим, что продольное и поперечное движения частицы оказываются независимыми, и их можно рассмотреть отдельно. При этом составляющая силы, параллельная магнитному полю, обуславливает ненулевое продольное ускорение частицы, которое изменяет продольную компоненту скорости. Под действием составляющей силы, перпендикулярной к магнитному полю, частица совершает сложное движение, являющееся суперпозицией вращения частицы и систематического сноса (*дрейфа*) с некоторой постоянной скоростью. Чтобы убедиться в этом, представим скорость поперечного движения в виде суммы

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v}_d + \vec{v}_r, \quad (2.14)$$

где  $\vec{v}_d$  — постоянная скорость, а  $\vec{v}_r$  — скорость вращения вокруг ведущего центра. Такое представление можно интерпретировать и как переход в движущуюся с постоянной, но заранее неизвестной (!), скоростью систему координат. Подстановка выражения (2.14) во вторую из формул (2.13) дает

$$m\dot{v}_{\perp} \equiv m\dot{v}_r = \vec{F}_{\perp} + \frac{q}{c} \vec{v}_d \times \vec{B} + \frac{q}{c} \vec{v}_r \times \vec{B}. \quad (2.15)$$

Так как первые два слагаемых справа – постоянные векторы, то они могут компенсировать друг друга. Это позволяет потребовать выполнение равенства

$$\vec{F}_{\perp} + \frac{q}{c} \vec{v}_d \times \vec{B} = 0.$$

Это требование и определяет величину скорости дрейфа частицы:

$$\vec{v}_d = \frac{c}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (2.16)$$

Оставшаяся часть уравнения (2.15)

$$m\dot{v}_r = \frac{e}{c} \vec{v}_r \times \vec{B}, \quad (2.17)$$

описывает вращение вокруг ведущего центра, как это очевидно из сравнения с уравнением (2.5). Скорость частицы в таком движении, как мы уже обсуждали в предыдущем параграфе, может только поворачиваться по направлению, не меняясь по абсолютной величине. Величина скорости вращения может быть найдена по начальной скорости частицы, которая, конечно, должна быть изначально задана:

$$v_r = |\vec{v}_{\perp 0} - \vec{v}_d|, \quad (2.18)$$

где  $\vec{v}_{\perp 0}$  - поперечная по отношению к магнитному полю компонента начальной скорости. Например, в частном случае  $\vec{v}_{\perp 0} = 0$  получаем

$$v_r = v_d = \left| \frac{cF_{\perp}}{qB} \right|. \quad (2.19)$$

Модуль скорости вращения определяет радиус окружности:

$$\rho = \frac{mcv_r}{qB}. \quad (2.20)$$

по которой вращается частица в подвижной системе координат, движущейся со скоростью (2.16).

Не составляет большого труда найти и точный закон поперечного движения частицы:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\perp} = \vec{r}_{\perp 0} + \vec{v}_d t + \frac{(\vec{v}_{\perp 0} - \vec{v}_d) \times \vec{B}}{\omega B} (1 - \cos \omega t) + \\ + \frac{\vec{v}_{\perp 0} - \vec{v}_d}{\omega} \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.21)$$

Индексом ноль здесь помечены начальные значения соответствующих величин.

Составить представление о разнообразии возможных траекторий поперечного движения можно по рис. 2.2.

Кроме того, следует отметить, что если поперечная компонента начальной скорости в точности совпадает со скоростью дрейфа:

$$\vec{v}_{\perp 0} = \vec{v}_d, \quad (2.22)$$

то, как это следует из закона движения, частица движется равномерно поперек магнитного поля. Такая возможность представляет большой интерес в проблеме транспорта частиц поперек сильного магнитного поля.

Нами не высказывалось никаких предположений о природе силы  $\vec{F}$ , поэтому вывод о характере движения справедлив для любой постоянной силы  $\vec{F}$ : продольное (в общем случае) ускорение и систематический снос с постоянной скоростью в совокупности с равномерным вращением в поперечной по отношению к магнитному полю плоскости.

Из формулы (2.16) следует, что скорость дрейфа не зависит от массы частицы, но зависит от знака ее заряда, если сила от знака заряда не зависит. Полезно отметить также, что действие постоянной силы, перпендикулярной к магнитному полю, приводит (в среднем по осцилляциям!) не к увеличению скорости частицы, а к движению ее перпендикулярно к магнитному полю с постоянной скоростью. С похожим явлением мы встречаемся в механике при изучении прецессии оси гироскопа, когда приложенный к гироскопу момент вызывает вращение его оси в направлении, перпендикулярном как к моменту количества движения гироскопа, так и к моменту силы.

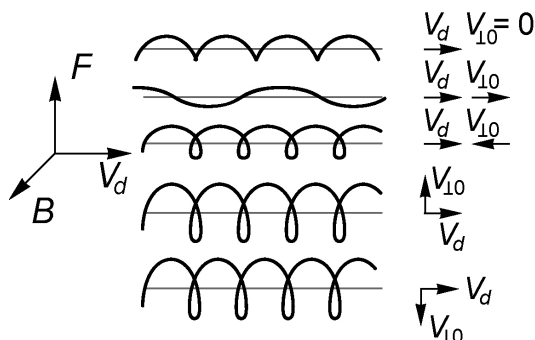


Рис.2.2. Типы возможных траекторий для некоторых частных случаев направления начальной скорости поперечного движения частицы в скрещенных полях (штриховая линия – положение центра ларморовской окружности)

### § 16. Дрейф заряженных частиц вдоль плоскости скачка магнитного поля

В качестве еще одного точно разрешимого примера с дрейфовым движением рассмотрим задачу о движении заряженной частицы в магнитном поле со скачком, слева и справа от плоскости которого магнитное поле однородно и одинаково направлено, но имеет разную величину (см. рис. 2.3), пусть справа будет  $B_2 > B_1$ . Вне скачка, где поле однородно, на расстоянии, превышающем ларморовский радиус, частицы описывают окружности, размер которых больше в области слабого поля (слева на рис.2.3).

На меньшем расстоянии при движении частицы её ларморовская окружность пересекает плоскость скачка, характер её движения резко меняется, так как каждый раз после пересечения этой плоскости скачком изменяется радиус окружности. Траектория приобретает сложный характер с наличием систематического «сноса» частицы вдоль плоскости скачка. Как видно из рисунка, дрейф перпендикулярен направлению магнитного поля и его градиента, причем, очевидно, имеет противоположный знак для разноименно заряженных частиц: для геометрии рис.2.3 он направлен вверх для положительного заряда, или был бы направлен вниз, если бы заряд был отрицательным.

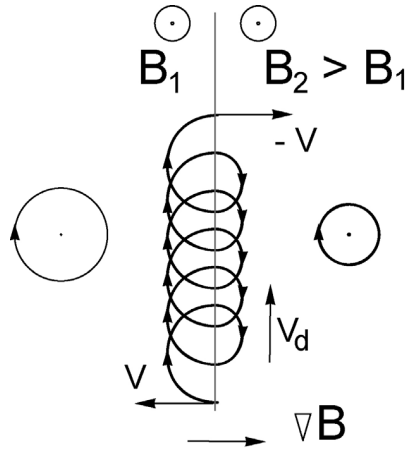


Рис.2.3. Схема возникновения дрейфа положительного заряда на границе со скачком величины магнитного поля

Нетрудно подсчитать скорость этого дрейфа. Пусть для простоты частица пересекает плоскость скачка по нормали. Тогда за время, равное сумме ларморовских полупериодов для области слева и справа

$$\Delta t = T_1 + T_2 = \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_2}, \quad (2.23)$$

где

$$\omega_{1,2} = \frac{qB_{1,2}}{mc},$$

циклотронные частоты, вычисленные по значению поля слева и справа от плоскости скачка. Частица смещается вдоль этой плоскости на длину

$$\Delta x = 2(\rho_1 - \rho_2) = 2\left(\frac{v}{\omega_1} - \frac{v}{\omega_2}\right). \quad (2.24)$$

Здесь  $v$  – скорость частицы, которая предполагается изначально направленной перпендикулярно плоскости скачка. Очевидно, скорость дрейфа можно определить как

$$v_d = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2v}{\pi} \frac{B_2 - B_1}{B_2 + B_1} \equiv \frac{v}{\pi} \frac{\Delta B}{\langle B \rangle}, \quad (2.25)$$



где  $\Delta B = B_2 - B_1$  – величина скачка магнитного поля, а  $\langle B \rangle = (B_2 + B_1)/2$  – его среднее значение. Подчеркнем, что полученное решение – точное, причем в условиях, когда дрейфовое приближение заведомо неприменимо: размер неоднородности, как предполагается, должен быть значительно меньше, чем ларморовские радиусы частиц!

Величина скорости дрейфа зависит, очевидно, и от угла, под которым частица пересекает область скачка. Мы не будем останавливаться на этом интересном вопросе – эту зависимость несложно получить, по сути дела, тем же самым путем, как и рассмотренный выше более простой случай перпендикулярного пересечения. Дрейф возникает и том случае, когда слева и справа от некоторой плоскости магнитное поле по величине не меняется, но изменяет направление (см. рис.2.4). Магнитная конфигурация такого типа возникает в так называемых *токовых слоях*.

В центре симметричного, например, плоского токового слоя магнитное поле равно нулю, а вне этой центральной плоскости, как это следует из закона Ампера  $rot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ , меняет знак. Если толщиной слоя пренебречь, получим скачок направления поля.

Вне слоя частицы вращаются по ларморовским окружностям, здесь – одинакового радиуса, но с противоположным направлением вращения, и дрейфа нет, если расстояние от плоскости слоя превышает ларморовский радиус.

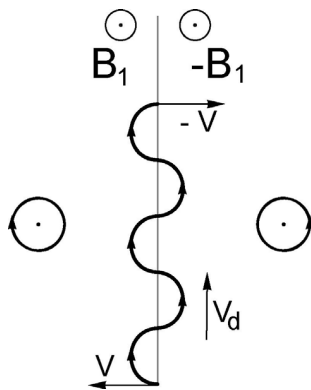


Рис.2.4. Дрейф положительного заряда при смене направления магнитного поля

Дрейф возникает, когда ларморовская окружность пересекает эту плоскость. Траекторию частицы можно получить следующим образом. Пусть пересечение плоскости слоя частицей – по нормали, тогда ларморовскую окружность следу-

ет «разрезать» вдоль вертикального диаметра и затем, для положительного заряда, правую половину следует отразить зеркально вверх, как это изображено на рис.2.4. При этом за ларморовский период смещение вдоль слоя, очевидно, составляет два ларморовских диаметра, так что скорость дрейфа для этого случая:

$$v_d = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4\rho}{T} = \frac{4v/\omega}{2\pi/\omega} = \frac{2}{\pi} v. \quad (2.26)$$

При пересечении «общего положения», при произвольном угле, скорость дрейфа, очевидно, меняется с изменением угла, но не зависит от величины магнитного поля! Подчеркнем, что и в этом случае дрейфовое приближение неприменимо.

### **§17. Важнейшие типы дрейфовых движений частиц в плазме**

Рассмотренный в §15 пример движения частиц в магнитном поле под действием дополнительной постоянной силы является точным решением нерелятивистских уравнений движения. Весьма важным является то, что закономерности, присущие этому движению, сохраняются и в случае, когда поля, действующие на частицу, являются переменными. Однако характерные масштабы их изменения во времени и по пространству должны быть, как уже обсуждалось, достаточно медленными в сравнении с ларморовским периодом осцилляций частицы и ларморовским радиусом описываемой ею окружности соответственно. В этом случае для скорости дрейфа вновь справедлива формула (2.16). С тем лишь существенным отличием, что скорость дрейфа должна быть достаточно мала, значительно меньше средней скорости хаотического движения частиц плазмы. Последняя, как известно, определяется тепловой скоростью частиц. Таким образом, приходим к условию

$$v_d \ll v_T, \quad (2.27)$$

ограничивающему, причем зачастую весьма существенно, область применимости дрейфового приближения в описании движения частиц плазмы. Предполагая указанные ограничения выполненными, рассмотрим кратко некоторые примеры дрейфовых движений плазмы.

### *Дрейф в электрическом поле*

Природа силы  $\vec{F}$  может быть любой, например гравитационной или электрической. В частном случае электрической природы силы, когда  $\vec{F} = e\vec{E}$ , получим дрейф в электрическом поле

$$\vec{v}_E = c \frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2}. \quad (2.28)$$

Дрейф в электрическом поле не зависит от знака заряда - плазма дрейфует как целое.

Теперь становится понятным смысл ограничения (2.11), наложенного на значение величины электрического поля. Необходимо, чтобы скорость дрейфа под действием электрического поля была значительно меньше тепловой скорости частицы, в противном случае нельзя говорить о медленном движении ведущего центра. Существенно, что характер движения частицы определяется именно соотношением величин полей  $E$  и  $B$ : при больших значениях поля  $E$  влиянием поля  $B$  можно пренебречь, и, очевидно, не может идти речи о дрейфе. При малых значениях электрического поля по сравнению с магнитным частица "замагничена" и медленно дрейфует в магнитном поле под действием электрического поля.

### *Дрейф в неоднородном магнитном поле ( $\nabla B \neq 0$ )*

Дрейф в неоднородном магнитном поле связан с кривизной магнитных силовых линий и с силой, возникающей при движении частицы вдоль криволинейных силовых линий. Рассмотрим две составляющие этой силы и соответственно получим две составляющие дрейфа.

• **Центробежный дрейф.** При движении частицы, навивающейся на силовую линию с радиусом кривизны  $R$ , на нее действует центробежная сила инерции

$$\vec{F}_{\text{б.д.}} = -\frac{mv_\parallel^2}{R} \vec{n}, \quad (2.29)$$

и возникает дрейфовая скорость, равная по величине ( $R^{-1} = \nabla B/B$ ).

$$v_{\text{б.д.}} = \frac{c}{q} \frac{mv_\parallel^2}{RB} = \frac{v_\parallel^2}{\omega} \frac{1}{R} = \frac{v_\parallel^2}{\omega} \frac{|\nabla B|}{B}, \quad (2.30)$$

и направленная по бинормали (за плоскость рисунка, см. рис. 2.5):

$$\bar{v}_{цб} = \frac{v_{\parallel}^2}{\omega} \frac{[\bar{B}\nabla B]}{B^2}, \quad (2.31)$$

где  $v_{цб}$  - скорость центробежного дрейфа, а  $\omega$  - циклотронная частота.

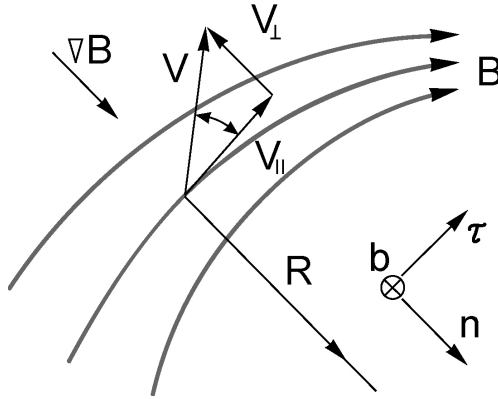


Рис. 2.5. Дрейф в неоднородном магнитном поле

• **Градиентный дрейф.** Скорость дрейфа в неоднородном поле зависит также от составляющей скорости частицы, перпендикулярной к магнитному полю. Уподобим вращающуюся вокруг силовой линии частицу магнитному диполью эквивалентного кругового тока. Тогда точное выражение скорости градиентного дрейфа можно получить из известного выражения для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном поле:

$$\vec{F} = -\mu \nabla B. \quad (2.32)$$

Для вакуумного магнитного поля, как можно показать, справедливо соотношение:

$$\frac{\nabla_{\perp} B}{B} = \frac{\bar{n}}{R}, \quad (2.33)$$

где  $R$ , напомним, - радиус кривизны силовой линии. Поэтому поперечная компонента силы, действующей на диполь, оказывается равной

$$\vec{F}_{\perp} = -\mu \frac{B}{R} \bar{n}, \quad (2.34)$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор нормали.

Подставляя это значение  $\vec{F}_\perp$  в выражение (2.16), получаем

$$\vec{v}_{\perp p} = \frac{v_\perp^2}{2\omega} \frac{[\vec{B}\nabla B]}{B^2}. \quad (2.35)$$

Реально механизм градиентного дрейфа состоит в том, что частица имеет различные радиусы вращения в разных точках траектории: часть времени она проводит в более сильном поле, часть в более слабом поле. Изменение радиуса и создает дрейф, как это обсуждали в предыдущем параграфе.

Скорость дрейфа в неоднородном магнитном поле представляет собой сумму скоростей центробежного и градиентного дрейфов (так называемый *дрейф по бинормали*):

$$\vec{v}_b = \frac{2v_\parallel^2 + v_\perp^2}{2\omega} \frac{[\vec{B}\nabla B]}{B^2} = \frac{1}{2\omega R} (v_\perp^2 + 2v_\parallel^2) \vec{b}, \quad (2.36)$$

где  $\vec{b}$  — орт бинормали (см. рис.2.5).

Скорость дрейфа зависит от заряда частицы (электроны и ионы дрейфуют в разные стороны), от её массы, от направления скорости частицы по отношению к магнитному полю и от величин напряженности и градиента напряженности магнитного поля. Важно отметить, что траектория ведущего центра проходит в области постоянного значения  $B$ , так как  $\vec{v}_b \perp \vec{B}$  и  $\vec{v}_b \perp \nabla B$ .

В неоднородном магнитном поле ( $\nabla B \neq 0$ ) электроны и ионы дрейфуют в разные стороны, следовательно, в плазме возникает ток с плотностью:

$$\vec{j} = \sum_{e,i} ne\vec{v}_b, \quad (2.37)$$

где предполагается суммирование по сортам заряженных частиц. Этот ток называют дрейфовым.

Далее увидим, что градиент давления ( $\nabla p \neq 0$ ) также приводит к появлению дрейфовых токов.

### **Поляризационный дрейф**

Когда частица испытывает ускорение, то в движущейся системе координат на нее действует инерционная сила  $\vec{F} = -m\vec{v}$ , и возник-

кает дрейф в соответствии с условием (2.17). В плазме часто появляются переменные электрические поля, определяемые местным разделением зарядов, так называемые поляризацонные поля. В этом случае на частицу действует переменная сила, и возникает электрический дрейф с переменной скоростью

$$\vec{v}_n = c \frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2},$$

где  $\vec{v}_n$  - дрейфовая поляризацонная скорость;  $\vec{E}_\perp$  - составляющая электрического поля, перпендикулярная к магнитному полю. Именно она и вызывает дрейф. При переменном  $\vec{E}_\perp$  меняется и  $\vec{v}_n$ , т.е. появляется ускорение, а, следовательно, и сила инерции  $\vec{F}_u = -m\dot{\vec{v}}_n$ . Под действием этой силы возникает поляризацонный дрейф

$$\vec{v}_n = \frac{c^2}{q} \frac{m\dot{\vec{E}}_\perp}{B^2}. \quad (2.38)$$

Величина  $\vec{v}_n$  зависит от массы (большая величина у ионов), заряда частицы, напряженности магнитного поля и скорости изменения электрического поля. Поляризацонный дрейф направлен вдоль вектора  $\dot{\vec{E}}_\perp$  - перпендикулярной составляющей производной по времени от напряженности электрического поля - параллельно или антипараллельно ему.

Этот дрейф создает поляризацонный ток - аналог тока смещения:

$$\vec{J}_n = ne\vec{v}_n = \rho_m \frac{c^2}{B^2} \dot{\vec{E}}_\perp, \quad (2.39)$$

где  $\rho_m$  - массовая плотность плазмы.

Можно определить и составляющую  $\varepsilon_\perp$  диэлектрической постоянной плазмы, перпендикулярную к магнитному полю. Добавляя к поляризацонному току  $\vec{J}_n$  поперечную компоненту тока смещения

смещения  $\vec{J}_{cm} = \frac{I}{4\pi} \dot{\vec{E}}_\perp$  (здесь точкой отмечена частная производная от поля по времени), получим

$$\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_{см} = \frac{I}{4\pi} \left(1 + 4\pi\rho_m \frac{c^2}{B^2}\right) \dot{E}_\perp. \quad (2.40)$$

Учитывая далее, что плотность тока связана с производной поля по времени хорошо известным соотношением

$$\vec{j} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \dot{E}, \quad (2.41)$$

находим

$$\varepsilon_\perp = 1 + 4\pi\rho_m \frac{c^2}{B^2}. \quad (2.42)$$

### ***Тороидальный дрейф и вращательное преобразование***

Рассмотрим поведение плазмы в магнитном поле тороидального соленоида. Магнитное поле тороидального соленоида аналогично магнитному полю прямого проводника и убывает с увеличением большого радиуса по закону  $1/R$  (рис.2.6). Это становится очевидным, если учесть, что величина тока на единицу длины окружности  $2\pi(R-r)$  больше, чем соответствующая величина на окружности  $2\pi(R+r)$ , где  $r$  - радиус поперечного сечения тора (см. рис.2.6). Неравномерность магнитного поля вызывает возникновение дрейфа, приводящего к смещению ионов на одну (на рис.2.6 - вниз), а электронов на другую (на рис.2.6 - вверх) сторону соленоида, а значит, к появлению дрейфового тока. Так как дрейфовый ток замкнуты не может, то возникает разделение зарядов и соответствующее ему поляризационное электрическое поле  $E$ .

Но теперь появление этого поля приводит к возникновению дрейфа плазмы в целом в скрещенных взаимно перпендикулярных  $E \perp B$  полях, выбрасывающего плазму на наружную стенку тороидального соленоида.

Таким образом, в свободном от внутренних токов тороидальном соленоиде плазма не будет устойчиво удерживаться. Картина принципиально изменится, если внутри, в центре сечения соленоида, поместить проводник с током, или пропустить ток непосредственно по плазме. Этот ток создаст собственное магнитное поле  $B_\phi$ , перпендикулярное к полю соленоида  $B_z$ , так что суммарная силовая линия магнитного поля пойдет по винтовой траектории,

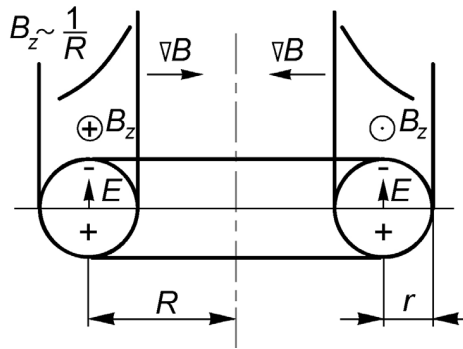


Рис. 2.6. Торoidalный дрейф

охватывающей ось соленоида. Образование винтовых линий магнитного поля получило название *вращательного (или ротационного) преобразования*. Эти линии будут замыкаться сами на себя, если коэффициент запаса устойчивости, представляющий собой отношение шага винтовой силовой линии к длине оси тора

$$q = \frac{B_z}{B_\phi} \frac{a}{R}, \quad (2.43)$$

будет равен отношению двух целых чисел, т.е. равен рациональному числу - отношению числа оборотов силовой линии вокруг тора и числа оборотов вокруг оси тора. При значениях этой величины, не равных рациональному числу, силовые линии, никогда не замыкаясь, за бесконечное число оборотов образуют замкнутые тороидальные магнитные поверхности, вложенные друг в друга и образованные каждая единственной силовой линией. Винтовые линии магнитного поля сделают невозможной поляризацию плазмы: перемещаясь вдоль них, электроны и ионы создадут дрейфовые токи, которые будут взаимно нейтрализованы, не будет разделения зарядов, не появится и электрическое поле. Следовательно, не возникнет и торoidalный дрейф, выбрасывающий плазму на наружную стенку, имеющий место в чисто торoidalном магнитном поле.

Существенно, что в каждой точке свое соотношение величин магнитных полей тока и соленоида (ведь магнитное поле тока будет убывать по закону  $1/r$  ( $r$  малое!) во все стороны от тока). Поэтому силовые линии расположенных рядом магнитных поверхно-



стей скрещиваются, причем угол наклона непрерывно меняется с изменением  $R$ . Образуется сложная пространственная сетка магнитных силовых линий, получившая название *шир*. Такая сетка существенно затрудняет перемещение плазмы поперек магнитного поля.

В системах типа *токамак* (сокращенное от «*токовая камера с магнитными катушками*», см. главу 9) внутри тороидального соленоида по плазме течет ток, имеется вращательное преобразование и шир. Конечно, ток распределен по сечению плазменного шнура (а течет не только в центре), значит, реальная картина сложнее рассмотренной выше, но возможность компенсации эффекта тороидального дрейфа остается в силе. Американский физик Спитцер доказал, что вращательное преобразование можно получить и без тока в плазме. Такого типа системы для удержания плазмы получили название *стеллараторы*.

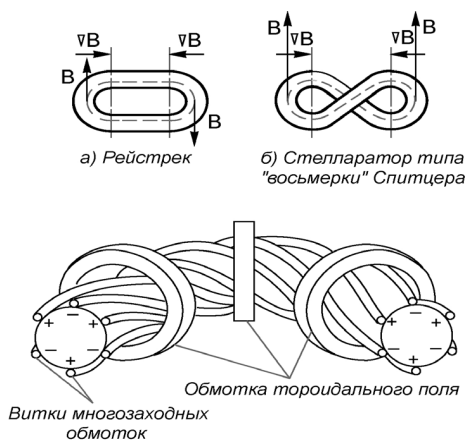


Рис.2.7. Геометрия стеллараторов

Возможность реализации вращательного преобразования без тока в плазме можно пояснить с помощью схемы, изображенной на рис. 2.7.

Разрежем (мысленно) тороидальный соленоид пополам и соединим его концы: а) прямолинейными участками – получим так называемый *рейстрек* (в прямых участках тоже создается магнитное поле). Силовые линии магнитного поля замыкаются, дрейф за-

ряженных частиц в правой и левой тороидальных частях имеет одинаковое направление. Поэтому по-прежнему остается возможность возникновения поляризационного электрического поля  $E$  и дрейфа в перпендикулярных  $E \perp B$  полях, направленного к наружной стенке камеры; б) накрест - получим стелларатор типа восьмерки (в прямых участках тоже создается магнитное поле). В этом случае магнитные силовые линии имеют возможность «прокручиваться» вокруг оси системы и, вообще говоря, не будут замыкаться: можно показать, что на каждом «обходе» силовая линия поворачивается на учетверенный пространственный угол между тороидальными участками, тем самым становится винтовой линией и реализуется эффект вращательного преобразования с компенсацией тороидального дрейфа.

Это же можно объяснить несколько проще: в рейстрекке при переходе от левой половины тора к правой (рис.2.7,а) меняется направление у векторов  $B$  и  $\nabla B$ , так что направление скорости дрейфа  $\bar{v}_d \sim \bar{B} \times \nabla B$  сохраняется, возможна поляризация плазмы, возникновение электрического поля и т.д. В стеллараторе типа «восьмерки» Спитцера при переходе от левой половины тора к правой (рис.2.7,б), при прежней ориентации векторов  $\nabla B$ , за счет эффекта вращательного преобразования восстанавливается направление вектора  $B$ , так что направление скорости дрейфа  $\bar{v}_d$  меняется на противоположное. Поляризация невозможна – как бы создаются два одинаковых электрических поля, направленных антипараллельно, т.е. компенсирующих друг друга.

Расчеты показали (и опыт подтвердил), что вместо пространственного перекрещивания концов, то есть вместо создания магнитной системы с пространственной осью, что является достаточно сложной технической задачей, можно на тороидальные части рейстрека накладывать дополнительные специальные многозаходные (обычно двух- или трехзаходные) обмотки. При этом токи в соседних витках выбираются текущими в противоположных направлениях (рис.2.7,в). В такой системе также возникает вращательное преобразование силовых линий магнитного поля и становится возможным образование вложенных друг в друга замкнутых магнитных поверхностей.

Правда, эти поверхности находятся внутри некоторой граничной, называемой *сепаратрисой*, заполняют не все сечение камеры

и имеют довольно сложную форму. Но существо дела сохраняется: любой стелларатор является идеальной магнитной ловушкой для отдельных частиц и способен хорошо удерживать плазму без пропускания дополнительного тока в ней. Так как в таких системах имеются магнитные силовые линии, не выходящие за пределы системы (замкнутые или уходящие в бесконечность на замкнутой поверхности), то подобные системы называют закрытыми (иногда замкнутыми).

## § 18. Адиабатические инварианты

Как известно из механики, любая механическая система, совершающая финитное движение, например, математический маятник или груз, подвешенный на пружинке, имеет траекторию, занимающую в фазовом пространстве ограниченную область (в простейшем случае одномерного движения это плоскость обобщенно-

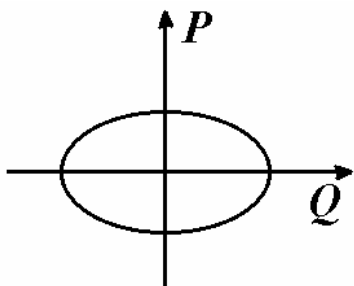


Рис.2.8. «Фазовый портрет» одномерного осциллятора

го импульса и обобщенной координаты, рис.2.8). Если энергия этой системы сохраняется, то траектория, отвечающая заданной энергии  $W$ , является замкнутой. Охватываемая этой траекторией площадь, очевидно, является точным интегралом движения. Существенно, что приближенное сохранение этой площади имеет место и том случае, когда энергия системы меняется со временем под действием какого-либо возмущения (например, слабого трения, или изменения длины маятника и тому подобное), но это изменение медленное по сравнению с периодом невозмущенного движения. Теперь эта площадь уже не является точным интегралом движения, и сохранение имеет место лишь в среднем по периоду невозмущенного движения. В этом случае говорят о сохранении *адиабатического инварианта*. По размерности эта площадь пропорциональна произведению средней за период энергии частицы на величину этого периода:

$$J \sim \langle W \rangle T. \quad (2.44)$$

Поэтому, если при изменении какого-либо параметра системы период движения уменьшается (например, для математического маятника период, как известно, определяется соотношением  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , и период уменьшается с уменьшением длины маятника), то её энергия в среднем возрастает.

Принцип адиабатической инвариантности находит важные приложения к проблеме удержания плазмы – по необходимости траектории частиц должны быть финитными. Рассмотрим кратко некоторые приложения этого принципа для случая движения частиц в магнитном поле.

### *Инвариантность магнитного момента $\mu$ частицы во времени*

Если заряженная частица движется в однородном, но меняющемся во времени магнитном поле, то ее ларморовский радиус и перпендикулярная скорость будут меняться. Это происходит потому, что индуцированное меняющимся магнитным полем электрическое будет ускорять (или замедлять) частицу.

Выберем координат так, чтобы вектор напряженности магнитного поля был параллелен оси  $z$  этой системы (см. рис.2.9), тогда  $\vec{B}(t) = B(t)\vec{e}_z$ , где  $\vec{e}_z$  - соответствующий единичный вектор. Из закона индукции

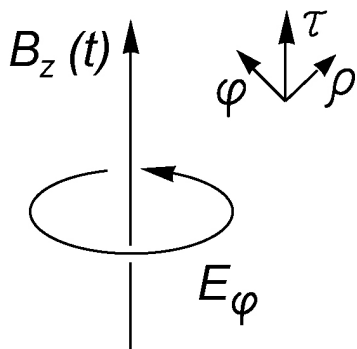


Рис.2.9. Геометрия полей (магнитное поле - убывает)

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_z = \text{rot}_z \vec{E} \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho E_\varphi, \quad (2.45)$$

находим

$$E_\varphi = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{c} \dot{B}(t). \quad (2.46)$$

Подставляя теперь эти поля в оставшиеся уравнения Максвелла, обнаруживаем, что

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_{\varphi} = \text{rot}_{\varphi} B_z \equiv 0, \quad \text{div} \vec{B} \equiv 0, \quad (2.47)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_{\varphi} \equiv 0.$$

Поэтому уравнения Максвелла удовлетворяются тождественно при выборе линейной зависимости напряженности магнитного поля от времени, так что:

$$B(t) = B_0 + \dot{B}_0 t, \quad E_{\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{c} \dot{B}_0, \quad (2.48)$$

где  $\dot{B}_0$  - постоянная величина (скорость изменения поля), которая может быть как положительной (поле растет), так и отрицательной (поле убывает);  $B_0$  - начальное значение поля.

Полученное решение уравнений Максвелла – точное, но несколько искусственное: трудно представить себе ситуацию, когда магнитное поле нарастает сразу во всем пространстве. На практике часто используют приближенное решение, считая, что порождающие магнитное поле токи меняются настолько медленно, что токами смещения (и, тем самым, волновым процессом установления поля) можно пренебречь. Тогда формулы

$$\vec{B}(t) = B(t) \vec{e}_z, \quad \vec{E} = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{c} \dot{B}(t) \vec{e}_{\varphi} \quad (2.49)$$

приближенно описывают распределение полей при произвольной зависимости  $B(t)$ , медленной на масштабах времени  $\Delta t \sim L/c$ , где  $L$  - размер области, занимаемой полем.

Для иллюстрации сохранения  $\mu$  – магнитного момента или *поперечного адиабатического инварианта* – при движении частицы в переменном магнитном поле ограничимся грубым приближением, считая, что радиальная скорость тождественно равна нулю и радиус орбиты – постоянный. В этом приближении уравнения движения сводятся к виду

$$m \dot{v}_{\varphi} = e E_{\varphi}, \quad m v_{\varphi} = -\frac{e}{c} \rho B \quad (2.50)$$

и, как не трудно проверить, дают соотношение

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v_{\varphi}^2}{2} \right) = \frac{v_{\varphi}^2}{2B} \frac{dB}{dt}. \quad (2.51)$$

Это означает, что отношение

$$\frac{v_{\varphi}^2}{B} = const \quad (2.52)$$

сохраняется. Переобозначив  $v_{\varphi} \rightarrow v_{\perp}$ , получим окончательно

$$\frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \mu = const. \quad (2.53)$$

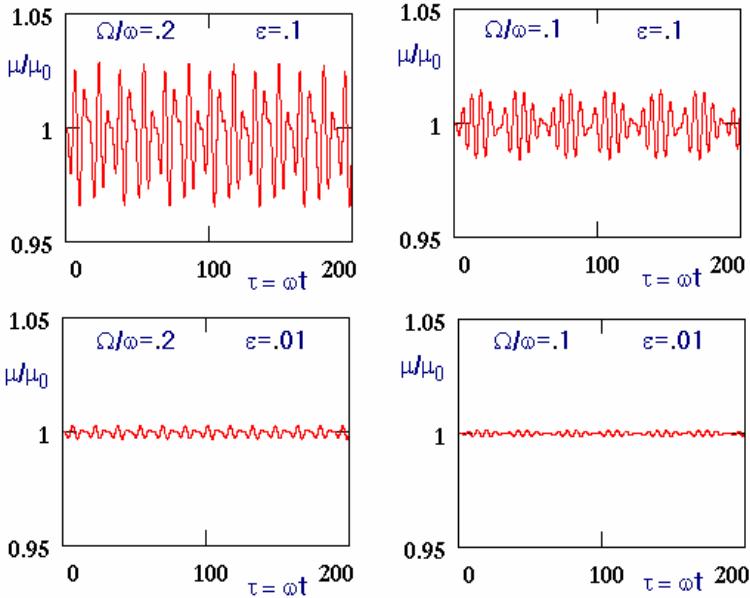


Рис.2.10. Иллюстрация сохранения поперечного адиабатического инварианта в слабо переменном, медленно осциллирующем поле

$B = B_0(1 + \epsilon \cos \Omega t)$ ;  $\omega$  - ларморовская частота,  $\mu_0$  - начальное значение

Грубое приближение, использованное выше, вовсе не обязательно. Детальные расчеты (см., например [11]) показывают сохранение  $\mu$  в общем случае в условиях применимости адиабатического приближения. Для иллюстрации «качества» сохранения  $\mu$  на рис.2.10 приведены результаты точных численных расчетов этого параметра для частного вида осциллирующего поля.

**Инвариантность  $\mu$  частицы в постоянном во времени и неоднородном в пространстве магнитном поле**

Когда поле  $B$  постоянное во времени, но медленно меняется в пространстве, то при переходе частицы из слабого поля в более сильное на нее действует сила (рис.2.11):

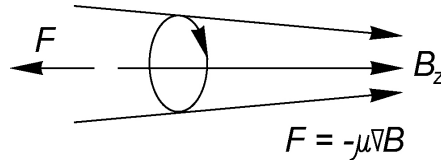


Рис.2.11. Выталкивание заряженной частицы неоднородным магнитным полем.

$$F_z = -\mu \frac{\partial B}{\partial z} = m \frac{dv_{\parallel}}{dt}; \quad (2.54)$$

Здесь

$$v_{\parallel} = \frac{dz}{dt}. \quad (2.55)$$

После преобразования вдоль траектории получим

$$-\mu \frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{mv_{\parallel}^2}{2} \right). \quad (2.56)$$

Так как полная энергия при движении в магнитном поле сохраняется

$$\frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \frac{mv_{\perp}^2}{2} = \text{const},$$

то получаем

$$-\mu \frac{dB}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{mv_{\perp}^2}{2} \right) - \frac{d}{dt} (\mu B); \quad (2.57)$$

что возможно, только если

$$\mu = \text{const}. \quad (2.58)$$

Неточность, допущенная при выводе, в данном случае связана с тем, что изменения  $B$  в перпендикулярном направлении не учтены. Это допустимо лишь

при медленном изменении  $B$ , т.е. если выполняется условие (2.10). Обобщая уравнения (2.53) и (2.58), можно сказать, что магнитный момент представляет собой адиабатический инвариант движения заряженной частицы в медленно изменяющемся магнитном поле.

Отсюда можно сделать несколько интересных выводов. Из вполне очевидных алгебраических выкладок

$$\frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{m^2 v_{\perp}^2 c^2}{e^2 B^2} \frac{e^2}{2mc^2} B = const \cdot \rho^2 B =$$

$$= const \cdot \Phi = const$$
(2.59)

следует, что магнитный поток, пронизывающий ларморовский кружок, адиабатически постояен. Это обстоятельство приводит к выводу, что при изменении магнитного поля ларморовский радиус изменяется по закону:

$$\rho \sim \frac{l}{\sqrt{B}},$$
(2.60)

то есть значительно медленнее, чем в случае постоянной поперечной скорости.

Аналогично получим:

$$mv_{\perp} \rho = const,$$
(2.61)

то есть момент количества движения частицы также остается адиабатически постоянным.

### *Инвариантность величины $v_{\parallel}l$*

Рассмотрим движение частицы в ящике с упругими стенками (рис.2.12). Пусть скорость частицы, направленная вдоль дна ящика, равна  $v_{\parallel}$ , а одна из стенок ящика движется со скоростью  $U < v_{\parallel}$ . Для заряженной частицы «стенкой ящика» может быть область усиленного магнитного поля, от которой частица отражается.

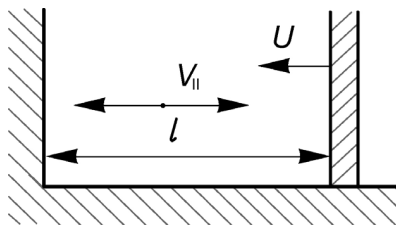


Рис.2.12. Частица в ящике с движущейся стенкой

При упругом отражении от движущейся стенки частица изменит скорость на величину  $\delta v = 2U$  (считаем массу стенки бесконечной). Тогда изменение скорости частицы за одно полное колебание



$$\delta t = \frac{2l}{v_{\parallel}}, \quad (2.62)$$

будет равно

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{2U}{2l} v_{\parallel}. \quad (2.63)$$

Так как  $U = -\frac{dl}{dt}$ , то получаем

$$\frac{dv_{\parallel}}{v_{\parallel}} + \frac{dl}{l} = 0 \quad (2.64)$$

или

$$v_{\parallel} l = \text{const}. \quad (2.65)$$

Сближающиеся стенки увеличивают скорость частицы.

## § 19. Применение адиабатического и дрейфового приближений

### *Зеркальные ловушки (пробкотроны)*

На использовании адиабатической инвариантности магнитного момента заряженной частицы в магнитном поле основаны открытые магнитные ловушки.

Рассмотрим движение заряженной частицы в постоянном во времени аксиально-симметричном магнитном поле соленоида, усиленном на обоих концах. Форма силовых линий магнитного поля для этого случая изображена на рис.2.13,а.

Пусть в некоторой точке А родилась заряженная частица, движущаяся со скоростью  $\vec{v}$ , направленной под углом  $\alpha$  к силовой линии магнитного поля ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ). Используя определение поперечного адиабатического инварианта (2.53), и учитывая, что  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ , можно получить соотношение:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{B} = \frac{\mu}{mv^2/2}, \quad (2.66)$$

где  $B$  – величина индукции магнитного поля в точке «рождения» частицы.

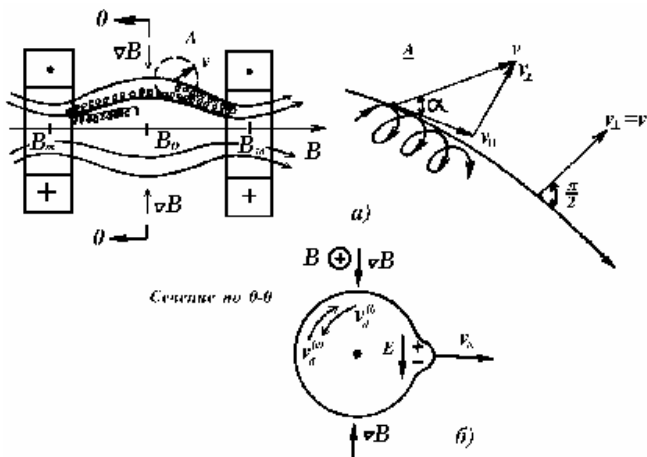


Рис.2.13. Заряженная частица в магнитном поле пробкотрона

Заметим, что поскольку правая часть (2.66) представляет собой отношение двух сохраняющихся величин – адиабатического инварианта  $\mu$  и полной кинетической энергии  $mv^2/2$ , то это соотношение справедливо не только в начальной точке, но и в любой другой точке вдоль траектории частицы, если под величинами  $\alpha$  и  $B$  понимать текущие значения угла наклона и магнитной индукции. Иными словами, согласно (2.66) при смещении частицы вдоль траектории изменение одной из величин  $\sin^2\alpha$  или  $B$  вызывает пропорциональное изменение другой из них. Но тогда мы видим, что при движении в область с увеличивающимся магнитным полем по мере роста величины индукции магнитного поля угол наклона скорости частицы по отношению к силовой линии, а, следовательно, и поперечная компонента скорости частицы  $v_{\perp}$  должны увеличиваться. Если синус этого угла достигнет предельного значения, равного единице, то будет  $v_{\perp}=v$ , а продольная скорость частицы обратится в ноль,  $v_{\parallel}=0$ . Частица перестанет смещаться вдоль силовой линии - она отразится и станет двигаться назад по направлению к центру системы (рис.2.13,а), затем, пройдя область с минимальным магнитным полем, достигнет противоположного конца, где поле вновь увеличивается, вновь отразится теперь здесь, и так далее. Другими словами, частица окажется “запертой” между магнитными проб-

ками (в англоязычной литературе - *mirrors*, а пробкотрон называют *mirrog machine*). Очевидно, что в поле данной системы могут удерживаться не все частицы, а только те, скорость которых в точке рождения имеет достаточно большой угол наклона к силовой линии, с тем, чтобы в сечении с наибольшим значением  $B$  (или раньше) частица отразилась. Отношение максимального поля  $B_m$  к минимальному  $B_0$  вдоль оси системы (см. рис.2.13,а),

$$R = B_m / B_0 > 1,$$

называют *пробочным отношением*, и для удержания частиц, родившихся в центре, необходимо, чтобы было выполнено неравенство

$$\sin \alpha \geq 1 / \sqrt{R}. \quad (2.67)$$

Для всех остальных частиц величина  $\sin \alpha$  должна быть еще больше, чтобы они оставались в ловушке. А те частицы, для которых выполнено обратное неравенство

$$\sin \alpha < 1 / \sqrt{R}, \quad (2.68)$$

уйдут из ловушки вдоль силовых линий магнитного поля.

Эти неравенства несложно обосновать следующим образом. Обозначим посредством  $\alpha_m$  угол наклона скорости по отношению к силовой линии магнитного поля в области, где индукция достигает максимального значения  $B=B_m$ . Эти величины должны быть связаны соотношением, которое можно получить, просто заменив в (2.66)  $\alpha$  на  $\alpha_m$  и  $B$  на  $B_m$ :

$$\frac{\sin^2 \alpha_m}{B_m} = \frac{2\mu}{mv^2}.$$

Пусть, далее,  $B_0$  величина индукции магнитного поля в центре системы, где первоначально расположена частица. Тогда соотношение (2.66) в этом положении должно быть записано в виде:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{B_0} = \frac{2\mu}{mv^2}.$$

Правые части в этих формулах совпадают, следовательно, получаем

$$\frac{\sin^2 \alpha_m}{B_m} = \frac{\sin^2 \alpha}{B_0},$$

или

$$\sin^2 \alpha_m = \frac{B_m}{B_0} \sin^2 \alpha \equiv R \sin^2 \alpha.$$

Поскольку левая часть этого равенства не превосходит единицу, то во всех «разрешенных» для движения частицы областях должно быть  $R \sin^2 \alpha \leq 1$ , т. е. частицы наверняка покинут ловушку, если выполнено условие (2.68). В противном случае, когда выполнено условие (2.67), область с максимальным полем для частицы оказывается недостижимой, и она не может покинуть ловушку.

Конус направлений, в пределах которого частицы покидают ловушку, носит название *опасного конуса потерь*. Системы, в которых все силовые линии выходят за пределы рабочей камеры, называют открытыми, к ним относятся все пробкотроны. Из-за симметрии геометрии удерживающего магнитного поля такие ловушки еще называют *аксиально-симметричными ловушками*.

Следует отметить, что условие удержания (2.67) в аксиально-симметричной ловушке является универсальным – оно не зависит ни от заряда, ни от массы, ни от величины модуля скорости, а определяется лишь отношением продольной и перпендикулярной (по отношению к магнитному полю) компонент скорости. Правда, это справедливо для отдельной частицы: реально в плазме частицы рассеиваются при столкновениях, направление вектора скорости при этом изменяется, может попасть в опасный конус и частица покинет ловушку. Медленные частицы рассеиваются быстрее (так как для них сечение кулоновского рассеяния больше,  $\sigma_c \sim \frac{1}{E^2}$ , см.

§ 6), поэтому они быстрее уходят, и в спектре частиц возникает “провал” в области малых скоростей. Кроме того, с повышением плотности плазмы в игру вступают собственные поля плазмы. Это – причина возникновения неустойчивости, о ней будем говорить позже.

Если магнитное поле в пробке нарастает во времени, то, вследствие сохранения поперечного адиабатического инварианта, увеличивается модуль поперечной компоненты скорости  $v_{\perp}$  и улучшается удержание – при этом изменится пробочное отношение  $B_m/B_0$ , и отражение частиц произойдет ближе к центру пробкотрона. Следовательно, область продольных осцилляций частиц сокращается и, согласно (2.65), должна увеличиться и продольная компонента скорости  $v_{\parallel}$  за счет сближения отражающих частицу упругих стенок. Точное решение подобной задачи о движении частицы в переменном и неоднородном магнитном поле является сложной проблемой.

Следует отметить, что при сжатии растет и плотность числа частиц, так как при росте магнитного поля возникает вихревое электрическое поле и появляется дрейфовая скорость, направленная так, что частицы собираются к центру системы.

Величину напряженности электрического поля и соответствующую ей скорость дрейфа можно оценить следующим образом. Обозначим радиус области, занятой плазмой,  $R(t)$ , тогда из теоремы о циркуляции,

$$\int_0^{2\pi} E_\varphi R d\varphi = -\frac{1}{c} \int_0^{R(t)} \frac{\partial B_z}{\partial t} 2\pi r dr, \quad (2.69)$$

получаем

$$E_\varphi = -\frac{R}{2c} \frac{dB_z}{dt}. \quad (2.70)$$

Приближенно считаем магнитное поле однородным в пределах окружности с радиусом  $R(t)$ . Определяя далее скорость дрейфа

$$\vec{v}_d = c \frac{E_\varphi}{B_z} \vec{e}_r, \quad (2.71)$$

приходим к соотношению

$$\frac{dR}{R} = -\frac{1}{2} \frac{dB_z}{B_z}, \quad (2.72)$$

или

$$R^2 B_z = \text{const}. \quad (2.73)$$

Это соотношение выражает сохранение магнитного потока, пронизывающего поперечное сечение поверхности (часто называемой *дрейфовой поверхностью*), по которой движется частица при её дрейфе в неоднородном магнитном поле (см. рис.2.13,а,б) - еще одного, так называемого *третьего адиабатического инварианта*, после поперечного, отвечающего быстрому вращению по ларморовской окружности, и продольного, отвечающего более медленным продольным осцилляциям частицы между пробками.

Несмотря на внешнее сходство формул (2.59) и (2.73), они отражают различные явления. Согласно формуле (2.59) магнитный поток, пронизывающий ларморовскую окружность, описываемую частицей, остается постоянным, а выражение (2.73) показывает, что радиус области, занятой плазмой, меняется так, чтобы поток через эту область был постоянным. Частицы должны не только изменить радиус вращения, но и переместиться поперек поля.

Если полное число частиц  $N=n\Omega$  (где  $\Omega$  - объем плазмы) остается постоянным, то, грубо определяя объем плазмы как  $\Omega \sim R^2 l$ , получаем

$$N = n_0 R_0^2 l_0 = n R^2 l,$$

или

$$nl = n_0 l_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 = n_0 l_0 \frac{B}{B_0}. \quad (2.74)$$

Следовательно, число частиц плазмы в расчете на единицу площади поперечного сечения (погонная плотность) меняется во времени пропорционально напряженности магнитного поля.

### Принцип “минимума $B$ ”

В центральной части пробкотрона (рис.2.13) магнитное поле убывает по радиусу от центра, поэтому  $\nabla B$  направлен к центру. Для одиночной частицы – это причина дрейфа по азимуту вокруг оси системы, но частицы разных знаков дрейфуют навстречу друг другу (см. рис.2.13,б), возникает дрейфовый ток, который, очевидно, направлен так, что вызывает уменьшение магнитного поля соленоида. Плазма как бы «выталкивает» удерживающее её магнитное поле. Если плотность плазмы достаточно велика, то эффект будет существенным. Он реально используется для измерения давления плазмы по величине вытесняемого поля - измерения так называемого *диамагнитного сигнала*. Если система идеально симметрична относительно оси, то дрейфовые потоки замкнуты, и накопления заряда не происходит. При нарушении симметрии сценарий последующих событий приобретает драматический характер. Предположим, что на боковой поверхности плазмы возникает выступ (см. рис.2.13,б) – «плазменный язык». Это возмущение свободно «растекается» вдоль силовых линий, ввиду отсутствия противодействия такому растеканию, а потому быстро превращается в вытянутый вдоль силовых линий магнитного поля желобок. По этой причине обсуждаемую нами сейчас неустойчивость обычно называют *желобковой*. В области желобка дрейфовые потоки не замкнуты, как это схематично показано на рис. 2.13,б. Поэтому здесь произойдет разделение зарядов и возникнет поляризационное электрическое поле  $E$ , направленное таким образом, что результирующий дрейф в скрещенных  $\vec{E} \times \vec{B}$  полях будет способствовать росту первоначального возмущения, завершающегося выбросом плазмы на стенку камеры.

Это проявление диамагнетизма плазмы: она всегда стремится перейти в область более слабого магнитного поля. Поэтому при

создании систем для удержания плазмы нужно располагать плазменный сгусток по возможности так, чтобы магнитное поле возрастало от него во всех направлениях, т.е. располагать плазму в области минимального магнитного поля. Именно по возможности, поскольку создание конфигураций магнитного поля, в которых поле нарастало бы во всех направлениях, очевидно, невозможно. Речь может идти лишь о нарастании наружу в среднем, когда вклад участков с благоприятной для удержания кривизной силовых линий превалирует над вкладом участков с неблагоприятной кривизной, где поле убывает. Это, по сути дела, и выражает содержание принципа «*минимума В*». Упрощенно (в деталях см. [11]) соответствующее этому принципу условие можно сформулировать следующим образом. Выделим мысленно в пределах объема, занимаемого плазмой, силовую трубку длиной  $l$  и сечением  $S$ , вытянутую вдоль силовых линий и наполненную плазмой. В равновесии такая трубка занимает положение, отвечающее минимальной потенциальной энергии. Сама по себе такая трубка под действием сил давления стремится расширяться. Пусть для простоты давление плазмы в пределах этой трубки постоянно – мы поступаем здесь строгостью ради наглядности. Итак, плазма стремится увеличить свой объем

$$\Omega = \int dSdl. \quad (2.75)$$

Поделив и домножив подынтегральное выражение на величину индукции магнитного поля, запишем эту формулу в виде

$$\Omega = \int (BdS) \frac{dl}{B}. \quad (2.76)$$

Поскольку пронизывающий эту трубку магнитный поток

$$\Phi = \int BdS \quad (2.77)$$

постоянный, то эту (положительную!) постоянную можно вынести за знак интеграла, и мы получаем

$$\Omega = \Phi \int \frac{dl}{B}. \quad (2.78)$$

Интеграл здесь берется вдоль силовой линии. Чтобы равновесное положение выделенной плазменной трубки было устойчивым, она должна иметь в этом положении максимальный объем. Следовательно, при любом «виртуальном» смещении трубки вариация

$$\delta \int \frac{dl}{B} < 0 \quad (2.79)$$

должна быть отрицательна. Это и есть (в упрощенной форме) содержание принципа «минимума  $B$ ».

Предложены различные способы создания магнитных полей, удовлетворяющих этому принципу: наложение на поле простого пробкотрона «стержней Иоффе» (рис.2.14) (названных так по фамилии автора, впервые предложившего и реализовавшего идею такой стабилизации), применение специальных катушек типа «бейсбол» (рис.2.15) и др. Соблюдение принципа «минимума  $B$ » обязательно, иначе в открытых ловушках плазма устойчиво не удерживается.

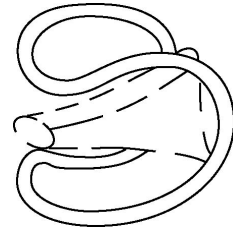
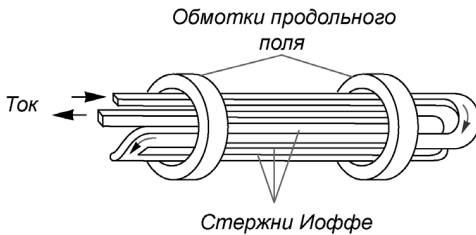


Рис.2.14. Схема создания поля с «минимумом  $B$ »

Рис.2.15. Обмотка «бейсбол»

### Плазменные центрифуги

В цилиндрических системах с аксиальным полем  $\vec{E}$  и радиальным полем  $\vec{B}$  (или с аксиальным полем  $\vec{B}$  и радиальным полем  $\vec{E}$ ) плазма будет вращаться по азимуту с дрейфовой скоростью  $v_E = c \frac{E}{B}$ . Второй вариант конструктивно проще, его для определенности и будем обсуждать. Возникает центробежная сила  $F = mv_E^2 / r$ , тем большая, чем больше масса частицы. Эта центробежная сила направлена по радиусу и в свою очередь создает дрейфовую скорость (разного знака для электронов и ионов, но в упрощенном рассмотрении забудем об электронах), складывающуюся со скоростью  $v_E$ . Так как при заданном радиусе эта добавка разная для частиц с разной массой, то между частицами возникает



сила трения  $F_{\text{тр}}$ , направленная по касательной к окружности, тормозящая тяжелые и ускоряющая легкие ионы. Под действием этой силы трения появится дрейф тяжелых частиц от центра, а легких - к центру системы. Ионы будут разделяться по массам, как и в обычной центрифуге, но скорости вращения можно сделать большими, значит, может быть большим и коэффициент разделения. Реально все сложнее и надо учитывать трение за счет столкновений с электронами, термодиффузию, взаимодействие со стенками и т.д. Ведется много исследований по применению подобных центрифуг для разделения элементов (или химических соединений) и даже изотопов.

## § 20. Явления переноса в замагниченной плазме

Плазма, помещенная в магнитное поле, становится анизотропной: направления вдоль магнитного поля и поперек магнитного поля оказываются неравноправными. Это связано с тем, что характер движения заряженных частиц вдоль поля и поперек поля резко отличается. В однородном магнитном поле продольное движение в отсутствие других сил остается свободным, а в поперечном направлении частица вращается по ларморовской окружности, радиус которой тем меньше, чем больше величина поля.

Различие в характере движения частиц находит свое отражение в изменении свойств плазмы, в частности, можно ожидать существенное отличие в величине «продольных» и «поперечных» коэффициентов переноса. Своеобразие плазменной среды, однако, в том, что она зачастую не следует простым, на первый взгляд очевидным, схемам. Такова, например, ситуация с проводимостью - продольная и поперечная проводимости отличаются лишь примерно вдвое. В этом случае говорят о наличии некоторого «механизма восстановления», выравнивающего анизотропию. Обсуждение процессов переноса в «замагниченной» плазме начнем с диффузии.

### *Диффузия*

Столкновения между частицами одного сорта в магнитном поле не приводят к макроскопическим изменениям их распределения в пространстве [12], не приводят, тем самым, к диффузии. Диффузия возможна лишь при столкновении разнородных частиц, например ионов и электронов плазмы. Напомним, что диффузионный поток (если отвлечься от эффектов термодиффузии и бародиффузии)

пропорционален градиенту концентрации плазмы, при этом направление потока противоположно градиенту концентрации, а коэффициент пропорциональности и есть коэффициент диффузии.

Коэффициент продольной диффузии плазмы, помещенной в магнитное поле, имеет такую же величину, как и коэффициент диффузии плазмы в отсутствие магнитного поля:

$$D_{\parallel} = D_0 = \frac{1}{3} \lambda v_{Te} = \frac{T_e}{m_e} \tau_{ei}. \quad (2.80)$$

Поскольку перемещение поперек магнитного поля после столкновения определяется величиной ларморовского радиуса  $\rho$ , а также временем между электрон-ионными столкновениями,  $\tau_{ei}$ , то коэффициент поперечной диффузии, как это следует из общего определения  $D \sim \langle (\Delta x)^2 \rangle / \tau$  (см. §10), должен определяться соотношением:

$$D_{\perp} \sim \frac{\rho^2}{\tau_{ei}}. \quad (2.81)$$

Так как диффузия плазмы носит амбиполярный характер, то в качестве характерного размера в формулу (2.81) следует подставлять меньший ларморовский радиус, в данном случае - электронный. Поскольку электронный ларморовский радиус определяется тепловой скоростью электронов  $v_{Te}$  и электронной циклотронной частотой  $\omega_{Be}$ :

$$\rho_e \sim \frac{v_{Te}}{\omega_{Be}},$$

то, после подстановки в (2.81), легко получить

$$D_{\perp} \cong \frac{D_{\parallel}}{(\omega \tau_{ei})^2}. \quad (2.82)$$

Величина произведения  $\omega_{Be} \tau_{ei}$  характеризует замагниченность частиц (иногда её называют *параметром замагниченности*), т.е. характеризует степень влияния магнитного поля на их движение. Если это произведение велико, то частица между столкновениями совершает много ларморовских оборотов. Выражение (2.82) применимо к случаю сильно замагниченной плазмы, но его нетрудно обобщить. В случае слабого поля коэффициенты продольной и поперечной диффузии должны совпадать  $D_{\perp}/D_{\parallel} \sim 1$ , а для сильного по-

ля, фактически,  $D_{\perp}/D_{\parallel} \sim (\omega_{Be} \tau_{ei})^{-2}$ . Поэтому в общем случае должно быть [13]:

$$D_{\perp} \sim D_{\parallel} \frac{1}{1 + (\omega_{Be} \tau_{ei})^2}. \quad (2.83)$$

Если учесть различие ионной и электронной температур, то выражение для коэффициента диффузии поперек поля принимает следующий вид [12]:

$$D_{\perp} \cong \frac{T_e + T_i}{T_e} \frac{D_0}{1 + (\omega_{Be} \tau_{ei})^2}.$$

В сильном магнитном поле, когда параметр замагниченности велик, диффузия поперек поля должна происходить очень медленно. Подчеркнем, что существенно отличается и характер зависимости коэффициентов диффузии от параметров плазмы. Согласно выражению (1.54), для коэффициента продольной диффузии имеем  $D_0 \sim T^{5/2}/n$ , а так как  $\omega_{Be} \sim B$ ,  $\tau_{ei} \sim T^{3/2}/n$ , то для коэффициента поперечной диффузии замагниченной плазмы получаем

$$D_{\perp} \sim \frac{n}{B^2 \sqrt{T}}. \quad (2.84)$$

Мы видим, что коэффициент продольной диффузии уменьшается с ростом плотности плазмы и растет с ростом её температуры, а поперечной, напротив, растет с ростом плотности и уменьшается с ростом температуры!

Тот факт, что коэффициент поперечной диффузии быстро убывает с ростом величины магнитного поля и к тому же должен уменьшаться по мере нагрева плазмы, и определило надежду обеспечить термоизоляцию плазмы с помощью сильного магнитного поля. К сожалению, существуют и другие причины, приводящие к возникновению потоков плазмы поперек магнитного поля, значительно превышающих потоки, вызываемые классической столкновительной диффузией. Наиболее существенными из них являются неустойчивости, о них будем говорить позже. Но и в однородном поле, в спокойной бестоковой плазме могут возникать местные электрические поля, появление которых также приводит к перераспределению концентрации, к диффузии.

Такие процессы получили название турбулентной диффузии. Качественно можно ее описать, предположив, что масштаб возникающих флуктуационных электрических полей определяется соотношением:

$$e|E| \sim T. \quad (2.85)$$

Другими словами, характерная энергия, которую набирают частицы (с зарядом  $e$ ) в поле, оказывается порядка тепловой энергии плазмы. В пределах

области, протяженность которой порядка  $l$ , плазма дрейфует под действием скрещенных  $E \times B$  полей. Если направление поля меняется хаотически, то в соседних областях с изменением направления электрического поля меняется и направление дрейфа – плазма движется со скоростью

$$v_E = c \frac{E}{B}, \quad (2.86)$$

и беспорядочно меняет направление своего движения. Флуктуационные ячейки живут короткое время, порядка времени пролета  $\tau \sim l/v_E$ . Изучение движения частиц в подобных турбулентных полях является сложной, самостоятельной задачей. Упрощенно его можно трактовать как диффузию (часто используют термин *турбулентная диффузия*) с эффективным коэффициентом диффузии, определяемом величиной  $l$  из (2.85) и  $v_E$  из (2.86),

$$D_{Турб} \sim \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{\tau} \sim \frac{l^2}{\tau} \sim v_E l \sim \frac{cT}{eB} \quad (2.87)$$

Эта полученная из нестрогих качественных соображений формула фактически совпадает с эмпирической формулой Бома, полученной из анализа экспериментальных результатов:

$$D_B = \frac{l}{16} \frac{cT}{eB}. \quad (2.88)$$

Коэффициент диффузии, определяемый этой формулой, носит название *бомовского коэффициента диффузии*. Зависимости величин  $D_B$  и  $D_{\perp}$  от величины магнитного поля различны. Сравнивая выражения (2.82) и (2.88), находим для отношения коэффициентов диффузии

$$D_B/D_{\perp} \sim \omega_{Be} \tau_{ei} \sim BT^{3/2}/n, \quad (2.89)$$

т.е. в замагниченной плазме, когда за время между столкновениями электрон успевает совершить много ларморовских оборотов, определяющую роль должна играть турбулентная диффузия. Следует отметить, что с увеличением температуры коэффициент классической диффузии  $D_{\perp}$  уменьшается, а турбулентной,  $D_{Турб}$ , – растет. Это означает, что диффузия «по Бому» практически не оставляет надежд на длительное удержание горячей плазмы магнитным полем.

## *Неоклассическая диффузия*

Необходимо отметить, что в ряде экспериментов со спокойной, практически равновесной, холодной плазмой (на так называемых *Q-машинах*) неоднократно наблюдалась диффузия, коэффициент которой весьма близок к классическому значению.

На других установках, в частности, на стеллараторах измеряемое время удержания плазмы соответствовало коэффициенту диффузии значительно превышающему классический и близкому по величине к определяемому формулой Бома. В то же время измерения на установках типа токамака, величины коэффициента диффузии оказались больше классического, но значительно меньше бомовского коэффициента диффузии.

Превышение коэффициента диффузии в столкновительном режиме над его классическим значением, полученным для однородного поля, находит объяснение, как впервые было показано Пфиршем и Шлютером, в изменении геометрии поля. В геометрии неоднородного магнитного поля токамака (рис. 2.16), существенную роль играют дрейфы. Дрейфовые поверхности отличаются от магнитных поверхностей. При этом сдвиг может превышать величину ларморовского радиуса. В результате при столкновении частица смещается поперек поля на расстояние, превышающее ларморовский радиус, что и вызывает эффективное увеличение коэффициента поперечной диффузии, который оказывается равным:

$$D_{\text{пш}} = (1 + q^2) D_{\perp}. \quad (2.90)$$

где  $q > 1$  - коэффициент запаса устойчивости, равный отношению шага силовой линии к длине системы вдоль оси.

Качественно этот результат можно получить следующим образом. В винтовом поле характерным размером является шаг силовой линии, пусть  $h$ . Частица, движущаяся со скоростью  $v$ , пролетает расстояние порядка шага за время  $t_{\text{прол}} \sim h/v$ , и за это время сдрейфовывает поперек поля на расстояние

$$\Delta_{\text{н пол}} \sim v_d t_{\text{н пол}}.$$

Здесь  $v_d$  - скорость дрейфа по бинормали, которую, грубо считая  $v_{\parallel} \sim v_{\perp} \sim v_T$ , оцениваем, согласно (2.36), как

$$v_d = \frac{v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2}{2R\omega_B} \sim \frac{v_T^2}{R\omega_B}, \quad (2.91)$$

где  $R$  – большой радиус тора,  $\omega_B$  – циклотронная частота, а  $v_T$  – тепловая скорость движения частиц. Тогда

$$\Delta_{n_{\text{пол}}} \sim v_d \frac{h}{v} \sim \frac{v^2}{R\omega_B} \frac{h}{v} \sim q\rho_B, \quad (2.92)$$

где  $\rho_B$  – ларморовский радиус, а  $q = h/2\pi R$ . – коэффициент запаса устойчивости.

Увеличение в  $q$  раз характерного размера приводит к соответствующему увеличению коэффициента диффузии, и в режиме Пфирша-Шлютера должно быть:

$$D_{\text{III}} \sim q^2 D_{\perp} \quad (2.93)$$

Заменив здесь  $q^2$  на  $1+q^2$ , чтобы получить аккуратный переход к случаю магнитного поля с прямыми силовыми линиями, когда  $q \rightarrow 0$ , приходим к формуле (2.90).

Подчеркнем еще раз, что полученное увеличение коэффициента диффузии не связано с учетом каких-либо турбулентных пульсаций, а лишь с аккуратным учетом геометрии магнитного поля. В этом плане формула Пфирша-Шлютера также описывает классическую столкновительную диффузию поперек поля, но в магнитном поле тороидальной геометрии при наличии вращательного преобразования. При этом столкновения считаются достаточно частыми. Поясним, как можно получить отвечающую этому требованию граничную частоту столкновений. Очевидно, необходимо сравнить характерное время между столкновениями  $\sim v^{-1}$  и характерное пролетное время  $\sim h/v$ , с тем, чтобы получить для режима Пфирша-Шлютера:

$$v > v_{\text{III}} \sim \frac{v}{qR}. \quad (2.94)$$

При выполнении этого условия частицы успевают столкнуться раньше, чем пролетят характерный размер порядка шага винта.

При меньших частотах столкновений, как впервые показали Галеев и Сагдеев [14], оказывается существенным учесть ещё одну важную особенность в характере движения частиц в тороидальном поле с винтовыми силовыми линиями. Винтовые силовые линии, «намотанные на тор», сгущаются на внутреннем обводе тора и разрезаются на внешнем (рис. 2.16,а).

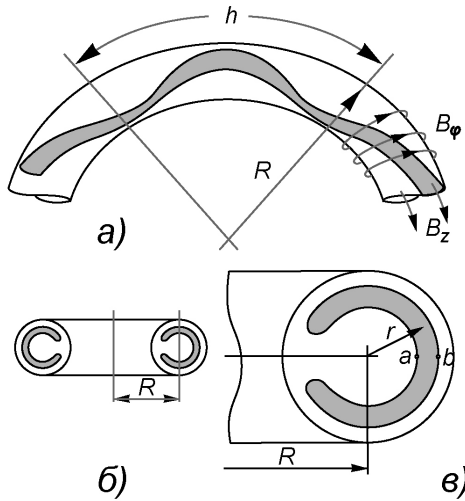


Рис.2.16. Схема образования локальных пробок в токамаках (а); схематическое изображение проекций траекторий запертых частиц на сечение токамака, перпендикулярное к его большому диаметру (б и в)

Уместная аналогия: представим себе намотанную с постоянным шагом из гибкой проволоки прямую спираль. Если её изогнуть в каком-либо месте, то на внутренней части в месте изгиба витки сгущаются, а на внешней - расходятся. В местах сгущения силовых линий магнитное поле больше и поэтому здесь располагаются локальные пробки так же, как и в пробкотронах, способные отражать частицы, скорость которых имеет достаточно большой угол наклона по отношению к направлению магнитной силовой линии. Конечно, геометрия магнитного поля в этих «пробкотронах» сложнее, чем в аксиально-симметричных ловушках, но суть дела остаётся прежней: часть частиц плазмы с малой продольной скоростью отражается в пробках и оказывается захваченной. Применительно к токамакам для них сложился термин *запертые частицы*. Остальные частицы, и их подавляющее большинство, не удерживаются в пробках, а потому называются *пролетными частицами*. Если тор тонкий, так что отношение радиуса сечения тора к радиусу тора является малой величиной,  $\varepsilon=r/R \ll 1$ , то «пробочное отношение» в этом случае отличается от единицы лишь на малую величину  $\sim \varepsilon$ . По этой причине, очевидно, запертыми будут лишь те частицы

(вспомним определение угла раствора опасного конуса потерь (2.67)), у которых мала продольная скорость  $v_{\parallel}/v < \sqrt{\varepsilon} \ll 1$ . Их относительное число по плотности (при равномерном распределении по углам) также, очевидно, невелико, и составляет  $n_{зан}/n_{пол} < \sqrt{\varepsilon} \ll 1$ . В этом можно легко убедиться, оценив объем в скоростном пространстве, приходящийся на долю запертых частиц.

Хотя запертых частиц относительно мало, но они дают заметный вклад в диффузию. Это связано с особенностью их траекторий. Поскольку продольная скорость запертых частиц мала, то за время движения от пробки к пробке они «выдрейфовывают» поперек магнитного поля значительно дальше, чем пролётные частицы. Действительно, длину порядка шага винта запертая частица пролетает за время

$$t_{зан} \sim \frac{h}{v_{\parallel}} \sim \frac{h}{v\sqrt{\varepsilon}} = \frac{t_{нпол}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (2.95)$$

и смещается за счет дрейфа поперек поля на расстояние

$$\Delta_{зан} \sim v_d t_{зан} \sim \frac{\Delta_{нпол}}{\sqrt{\varepsilon}} \gg \Delta_{нпол}. \quad (2.96)$$

При столкновении, изменив скорость, частица опишет другую траекторию, сместившись при этом поперек поля в среднем на расстояние (2.96), что и обуславливает увеличение коэффициента диффузии.

Осцилляцию запертых частиц между локальными пробками сопровождает «выдрейфование» поперек магнитного поля. При этом в проекции на сечение тора поперечное смещение относительно средней линии меняет знак, и в результате проекция траекторий запертых частиц на поперечное сечение тора напоминает известный субтропический плод (рис.2.16,б,в) – по этой причине говорят о диффузии «в банановом режиме». Элементарная теория [11] дает следующую оценку для величины коэффициента усиления диффузии в банановом режиме:

$$\frac{D_{бан}}{D_{III}} = \varepsilon^{-3/2} = \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2} \gg 1. \quad (2.97)$$



Сами «бананы» могут существовать, не разрушаясь, пока частота столкновений достаточно мала

$$v < v_{\text{бэ}} = \frac{v}{qR} \varepsilon^{3/2} = v_{\text{нй}} \varepsilon^{3/2}. \quad (2.98)$$

В обоих режимах и частых столкновений,  $v > v_{\text{пш}}$ , и редких столкновений,  $v < v_{\text{бан}}$ , коэффициент диффузии, очевидно, прямо пропорционален частоте столкновений (см. рис. 2.17), но угловой коэффициент этой пропорциональности существенно разный. В промежуточной области частот, когда «бананы» уже разрушаются, но столкновения ещё редкие, основной вклад в диффузию дают *медленные пролетные частицы*, а коэффициент диффузии почти не зависит от частоты столкновений – это *режим плато*. Величину коэффициента диффузии в режиме плато можно оценить, подставив в формулу Пфирша-Шлютера вместо частоты столкновений  $v = v_{\text{пш}}$ .

Превышение коэффициента диффузии над его классическим значением получило название *неоклассической диффузии*, а теория Галеева и Сагдеева, объясняющая причину этого превышения, называется *неоклассической теорией диффузии*, или, кратко, *неоклассикой*. Эксперименты подтверждают эту неоклассическую теорию.

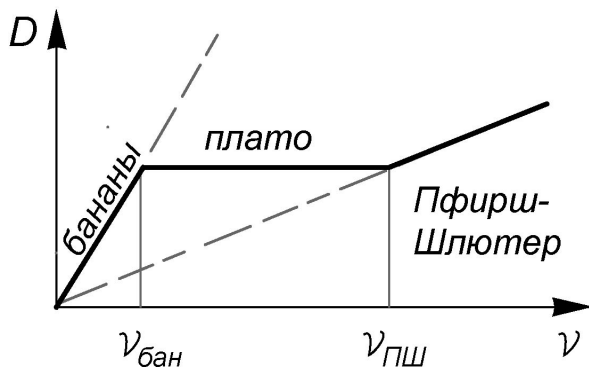


Рис. 2.17. Зависимость «неоклассического» коэффициента диффузии от частоты столкновений

## Теплопроводность

С точки зрения элементарной газокинетической теории коэффициент теплопроводности пропорционален коэффициенту диффузии, умноженному на плотность (1.61):

$$\kappa = Dn.$$

Это правило может быть формально применено к плазме, как для вычисления  $\kappa_{\parallel}$  так и для  $\kappa_{\perp}$ . Следует лишь учесть, что в отличие от диффузии, возможной лишь при столкновении разнородных частиц, в переносе тепла, напротив, главную роль играют столкновения одинаковых частиц. Следует иметь в виду, что при заданной плотности коэффициент теплопроводности вдоль магнитного поля  $\kappa_{\parallel}$  согласно выражениям (2.80) и (1.61), пропорционален длине свободного пробега частицы и в максвеллизированной плазме больше для электронов (примерно в корень из отношения масс,  $\sim(m_i/m_e)^{1/2}$ , раз), а коэффициент теплопроводности поперек магнитного поля, согласно выражению (2.82), больше для ионов (также примерно в корень из отношения масс,  $\sim(m_i/m_e)^{1/2}$ , раз).

Таким образом, согласно классическим представлениям, в замагниченной плазме вдоль магнитного поля тепло переносят главным образом электроны, а поперек магнитного поля – ионы.

Отметим, что неклассические соображения могут быть перенесены и на теплопроводность. Особенности движения частиц в поле сложной геометрии и здесь приводят к изменению величины коэффициента процесса переноса тепла. Правда, в экспериментах на токамаках наблюдается аномально большой по сравнению с неклассическим теплоперенос электронами.

### Проводимость плазмы в магнитном поле

#### • Проводимость плазмы вдоль магнитного поля

Наложение на плазму магнитного поля не оказывает влияния на движение частиц вдоль поля и, следовательно, не влияет на продольную проводимость, определяемую составляющей электрического поля, направленной параллельно магнитному полю:

$$j_{\parallel} = \sigma_{\parallel} E_{\parallel}, \quad \sigma_{\parallel} = \sigma_0 \sim \frac{T_e^{3/2}}{\Lambda}. \quad (2.99)$$

где  $\sigma_0$  - проводимость плазмы в отсутствие магнитного поля.

### • Поляризация плазмы

Если плазму, находящуюся в магнитном поле, поместить в электрическое поле  $E$ , перпендикулярное к магнитному полю, то согласно дрейфовым представлениям у электронов и ионов появится одинаковая скорость  $v_E = c \frac{E}{B}$ . Поэтому тока не будет, однако,

произойдет некоторое разделение зарядов – плазма поляризуется: частицы будут двигаться по трохоидам, смещаясь от первоначального положения на некоторые величины  $\Delta_e$ ,  $\Delta_i$ . Если пренебречь тепловой скоростью, приняв начальную скорость равной нулю, то трохоида вырождается в циклоиду (см. рис. 2.2), а величина среднего смещения  $\Delta_{e,i}$  будет равна ларморовскому радиусу, который следует вычислять по величине дрейфовой скорости.

Пусть вектор напряженности магнитного поля  $B$  направлен вдоль оси  $Z$  системы координат, а вектор напряженности электрического поля  $E$  - вдоль оси  $Y$  (см. рис.2.18). Скорость дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном полях будет направлена параллельно оси  $X$ . Модули средних смещений для электрона  $\langle \Delta_e \rangle$  и иона  $\langle \Delta_i \rangle$  равны соответственно:

$$\langle \Delta_e \rangle = \rho_{Be} = \frac{m_e v_E c}{eB}; \quad \langle \Delta_i \rangle = \rho_{Bi} = \frac{m_i v_E c}{eB}, \quad (2.100)$$

где  $v_E = c \frac{E}{B}$ , а заряды частиц по величине считаются одинаковыми.

Заряды в среднем “разойдутся” на величину

$$\Delta = \langle \Delta_e \rangle + \langle \Delta_i \rangle = \frac{(m_e + m_i)c^2 E_{\perp}}{eB^2}. \quad (2.101)$$

Умножив эту величину на заряд и на плотность, получим дипольный момент  $P$  единицы объема

$$P = ne\Delta = \frac{n(m_e + m_i)c^2 E}{B^2} = \rho_m c^2 \frac{E}{B^2}, \quad (2.102)$$

и поперечную по отношению к направлению магнитного поля компоненту диэлектрической проницаемости плазмы

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + 4\pi \frac{P}{E} = 1 + 4\pi \rho_m \frac{c^2}{B^2}. \quad (2.103)$$

В обеих формулах  $\rho_m = n(m_e + m_i)$  – массовая плотность плазмы.

Расчеты показывают, что величина  $\varepsilon_{\perp}$  может быть большой, поэтому поле в плазме сильно ослабляется. Например, для дейтериевой плазмы с пара-

метрами  $n=10^{10}\text{см}^{-3}$ ,  $B=10^3\text{Гс}$  получаем  $\varepsilon_{\perp}\approx 10^2$ . Если электрическое поле медленно меняется во времени, так что временной масштаб его изменения значительно превышает ларморовский период, то приведенная формула для  $\varepsilon_{\perp}$  справедлива и в этом случае. Напомним, что формула (2.103) ранее была получена при рассмотрении поляризационного дрейфа.

Диэлектрические свойства плазмы в магнитном поле претерпевают существенное изменение, величины  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$  различны, и диэлектрическая проницаемость замагниченной плазмы становится тензорной величиной. При этом компонента  $\varepsilon_{\parallel}$  остается такой же, как и в случае плазмы без магнитного поля. Она зависит от частоты падающей волны и плотности числа частиц плазмы, тогда как компонента  $\varepsilon_{\perp}$  – от массовой плотности плазмы и напряженности магнитного поля.

#### • Поперечная проводимость

Картина со свободным дрейфом плазмы в скрещенных полях справедлива лишь при условии, что нет причин, мешающих этому свободному движению плазмы. Реализовать такой случай можно, например, в случае аксиально-симметричного соленоида с дополнительным радиальным электрическим полем. Если ось  $Z$  направить вдоль оси соленоида, а ось  $Y$  – по радиусу, тогда ось  $X$  соответствует вращению по углу  $\varphi$  вокруг оси соленоида. Такие системы существуют, и в движущейся плазме удастся накапливать весьма заметную энергию – по существу создаются плазменные конденсаторы с большим значением  $\varepsilon_{\perp}$ . Другое применение – плазменные центрифуги – было рассмотрено ранее.

Если же по направлению дрейфа возникает какое-либо препятствие, то происходит перераспределение плотности частиц, так как вблизи препятствия частицы накапливаются. В результате возникает градиент давления и сила (в расчете на одну частицу)  $F = -\nabla p/n$ . Эта сила приводит к появлению дополнительного дрейфа, причем электроны и ионы дрейфуют в разные стороны – возникает ток. Таким образом, восстанавливается проводимость поперёк магнитного поля  $B$ .

На рис. 2.18 поле  $B$  направлено вдоль оси  $Z$ , а поле  $E$  – вдоль оси  $Y$  и возникает дрейф вдоль оси  $X$ . Если имеется какое-либо препятствие, то вблизи него плотность повышается; возникает  $\nabla p$  и отвечающая ему сила  $F$ . Дрейф под действием силы  $F$  направлен для ионов вдоль оси  $Y$ , для электронов – антипараллельно  $Y$ . Появ-

ляется ток  $j$ , направленный вдоль оси  $Y$ , то есть вдоль вектора напряженности электрического поля - проводимость «восстанавливается». Вычисляя этот ток, надо учитывать трение, возникающее при относительном движении электронов и ионов.

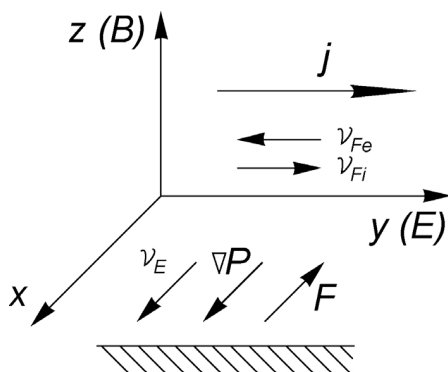


Рис.2.18. Схема восстановления проводимости

Точный вывод, строго учитывающий взаимодействие ионов и электронов [13], показывает, что поперечная проводимость не равна продольной,  $\sigma_{\perp} \neq \sigma_{\parallel}$ , т.е. проводимость плазмы анизотропна. При этом отношение  $\sigma_{\perp}/\sigma_{\parallel}$  зависит от зарядового числа иона. Для ионов с  $Z=1$ , например, для водородной плазмы

$$\sigma_{\perp} \approx 0,5\sigma_{\parallel} \quad (2.104)$$

В общем случае ток течет под углом к направлению электрического поля, и закон Ома для плазмы выглядит следующим образом [13]:

$$\vec{E}' = \frac{\vec{J}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\vec{J}_{\perp}}{\sigma_{\perp}} + \frac{1}{enc} [\vec{j} \vec{B}], \quad (2.105)$$

Здесь справа выделены все слагаемые, в которые входит плотность тока, в том числе последнее из них отвечает эффекту Холла, а слева в формуле фигурирует эффективное поле, равное

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V} \vec{B}] + \frac{1}{en} (\nabla p_e - \vec{R}_T). \quad (2.106)$$

Здесь первое слагаемое – напряженность электрического поля, второе учитывает эффект индукции, возникающий при пересечении потоком плазмы силовых линий магнитного поля, третье связано с градиентом электронного давления, а последнее учитывает влияние термо-ЭДС, возникающей из-за *термосилы*, в сильно замагниченной плазме примерно равной:

$$\vec{R}_T = -0.71 n_e (\vec{b} \nabla) T_e - \frac{3}{2} \frac{n_e}{\omega_e \tau_{ei}} [\vec{b} \nabla T_e], \quad \vec{b} = \frac{\vec{B}}{B}. \quad (2.107)$$

Формула (2.105) представляет собой, по существу, одну из возможных форм записи закона Ома для замагниченной плазмы. Из неё следует, что в сильном магнитном поле в направлении вдоль поля соотношение между соответствующей компонентой напряженности электрического поля и плотности электрического тока такое же, как и в отсутствие магнитного поля

$$E'_{\parallel} = \frac{j_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}}. \quad (2.108a)$$

Поперечная составляющая, однако, претерпевает существенное изменение: эффективное поле оказывается практически перпендикулярным к току. Проекция поперечного поля на ток связана с поперечной компонентой плотности тока соотношением, которое фактически не сильно отличается от предыдущего:

$$E'_{\perp j} = \frac{j_{\perp}}{\sigma_{\perp}}. \quad (2.108b)$$

Но для протекания тока поперек магнитного поля нужна составляющая эффективного поля, перпендикулярная и к магнитному полю, и к току - это так называемое холловское поле:

$$\vec{E}'_{Холл} = \frac{I}{enc} [\vec{j} \vec{B}] = \frac{\omega_{Be} \tau_{ei}}{\sigma_{\perp}} [\vec{j} \vec{B}]. \quad (2.109)$$

Зачастую холловское поле возникает в плазме автоматически за счет небольшого нарушения квазинейтральности, а внешние поля, которые надо прикладывать к плазме, определяются соотношениями (2.108,а) и (2.108,б). Иногда говорят, что магнитное поле не влияет на проводимость плазмы. Это надо понимать именно в указанном смысле.

### • Дрейфовые токи

Всегда, когда возникает градиент давления, появляется и отвечающая ему сила, в расчете на одну частицу (электрон или ион), равная  $\vec{F}_{e,i} = -\nabla p_{e,i} / n$ . Она вызывает дрейф частиц плазмы со скоростью

$$\vec{v}_d = \frac{c \vec{F} \times \vec{B}}{e B^2} = \frac{c}{en} \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2}, \quad (2.110)$$

причем частицы с зарядами разных знаков дрейфуют в противоположные стороны. Это приводит к переносу заряда, т.е. к проводимости, появлению так называемых токов намагничивания или дрейфовых токов

$$\vec{j} = \sum_{e,i} ne\vec{v}_d = c \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2}. \quad (2.111)$$

Появление электрических токов вследствие неэлектрических причин – специфическая особенность плазмы, присущая ей всегда, когда есть какие-либо неоднородности плазмы.

Из теории магнетизма [15] известно, что намагничение среды  $\vec{I}$  и плотность молекулярных токов  $\vec{j}_\mu$  связаны соотношением

$$\vec{j}_\mu = c \operatorname{rot} \vec{I}. \quad (2.112)$$

В плазме намагничение равно сумме магнитных моментов частиц в единице объема:  $\vec{I} = n \langle \vec{\mu} \rangle$  и, следовательно, в соответствии с (2.9),

$$\vec{I} = - \sum_{e,i} n \left\langle \frac{mv_\perp^2}{2B^2} \right\rangle \vec{B}. \quad (2.113)$$

Так как движение, перпендикулярное магнитному полю, имеет две степени свободы, то, производя усреднение, и обозначив  $p_\perp = nT_\perp$ , получаем

$$\vec{j} = -c \operatorname{rot} \frac{p_\perp \vec{B}}{B^2}. \quad (2.114)$$

В этой форме записи учитываются дрейфовые токи, возникающие вследствие градиента плотности и градиента магнитного поля. Если магнитное поле однородно, то формула (2.114) фактически совпадает с (2.111).

## ГЛАВА 3

### МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ ПЛАЗМЫ

#### § 21. Идеальная одножидкостная гидродинамика плазмы. Условия применимости

До сих пор мы рассматривали плазму как совокупность отдельных заряженных частиц и исследовали их движение в заданных полях. Однако такой подход к описанию плазменных явлений не может претендовать на полноту. При движении заряженных частиц плазмы возникают токи и отвечающее им магнитное поле, в свою очередь влияющее на движение частиц, которое, таким образом, оказывается самосогласованным с полем. Плазму с этой точки зрения можно рассматривать как сплошную среду, как некую проводящую субстанцию – проводящий газ. Если скорости движения плазмы не слишком велики (значительно меньше скорости звука), то роль сжимаемости этой субстанции незначительна, а уравнения газодинамики и гидродинамики совпадают; тогда плазму можно рассматривать как проводящую жидкость. Такой подход к описанию динамических процессов в плазме получил название *магнитной гидродинамики* или сокращенно МГД. Впервые он был предложен в сороковых годах двадцатого столетия Альфвенем применительно к динамике космической плазмы. Поведение проводящей жидкости в магнитном поле в большой степени определяется ее электрической проводимостью, именно она обуславливает скорость проникновения магнитного поля в проводник. В идеальный проводник магнитное поле, как известно, вообще не может проникнуть. Однако если в проводнике уже есть магнитное поле, то это поле будет “вморожено” в него – при своем движении проводник увлечет за собой магнитное поле. Реально плазма всегда имеет конечную проводимость, но если интересующие нас процессы протекают быстро, за времена, значительно меньшие времени проник-



новения магнитного поля в плазму, то плазму можно рассматривать как идеальный проводник.

Как известно [15], время  $\tau_s$  (так называемое *скиновое время*) проникновения поля на заданную глубину  $\delta$  в проводнике определяется по формуле

$$\tau_s = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \delta^2 = \frac{\delta^2}{D_{\text{маг}}}, \quad (3.1)$$

где  $\sigma$  – проводимость;

$$D_{\text{маг}} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} - \quad (3.2)$$

*коэффициент магнитной диффузии* поля в проводник. Для времен  $t \ll \tau_s$  плазму можно рассматривать как идеальный проводник с замороженным в него магнитным полем. Таким образом, одно из условий применимости приближения идеальной гидродинамики к плазме состоит в том, что длительность процесса  $t$  должна быть меньше скинового времени  $\tau_s$ .

Кроме того, магнитную гидродинамику обычно применяют к описанию плазмы в достаточно сильном магнитном поле и влиянием конечности ларморовского радиуса пренебрегают. Это возможно, если характерный размер области, занятой плазмой,  $L$  значительно больше ларморовского радиуса иона. Наконец, необходимо обеспечить квазинейтральность плазмы. Все эти условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} t &\ll \tau_s, \\ L &\gg \rho_i \\ Zn_i - n_e &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Установив такие ограничения (на самом деле, они более жесткие), можно применить для описания динамики плазмы уравнения магнитной гидродинамики, дополненные уравнениями Максвелла.

Магнитогидродинамическое представление плазмы может быть расширено рассмотрением не однокомпонентной проводящей жидкости, а смеси двух компонент – электронной и ионной. Такое обобщение становится необходимым, когда в плазме протекает ток с заметной плотностью, и уже нельзя считать, что скорости компонент плазмы совпадают, как это принято в одножидкостной гидродинамике. Двухжидкостное рассмотрение расширяет возможности

метода, однако, на практике приходится пользоваться и гидродинамическими и кинетическими представлениями совместно, так как гидродинамика не может отразить некоторые существенные стороны процесса.

## § 22. Основные уравнения

Основу любой гидродинамики составляют три закона сохранения – массы, импульса и энергии. При этом основными параметрами, характеризующими движение среды, являются массовая плотность, массовая скорость и давление, зависящие в общем случае от времени и координат. В магнитной гидродинамике, кроме того, вводят плотность электрического тока и вектор индукции магнитного поля. Для их определения уравнения динамики проводящей среды дополняют уравнениями Максвелла.

Введем следующие обозначения:

- *плотность массы*

$$\rho = \sum_{(\alpha)} n_{\alpha} m_{\alpha} = \sum_i n_i m_i,$$

здесь  $\alpha$  – индекс сорта частиц (электроны, ионы). Так как масса иона значительно превосходит массу электрона,  $M_i \gg m_e$  то вкладом массы электронов в плотность  $\rho$  обычно пренебрегают;

- *массовая скорость*

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{(\alpha)} n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \approx \vec{v}_i,$$

по той же причине примерно равна скорости ионной компоненты;

- *плотность заряда*

$$\rho_q = \sum_{(\alpha)} n_{\alpha} q_{\alpha} = e | (Z n_i - n_e),$$

где  $|e|$  – абсолютная величина заряда электрона;

- *плотность тока*

$$\vec{j} = \sum_{(\alpha)} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}.$$

Если предполагается, что скорость электронов  $v_e$  значительно превосходит скорость ионов  $v_i$ , то

$$\vec{j} = -|e|n_e\vec{v}_e.$$

Используя принятые обозначения, запишем:

- *Закон сохранения массы* (неразрывности струи):

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.4)$$

- *Уравнение движения единицы объема плазмы* (сохранения импульса):

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p + \vec{F}, \quad (3.5)$$

где  $p = p_e + p_i$  - полное давление плазмы, равное сумме давлений электронов и ионов,  $\vec{F}$  - внешняя сила (например, сила тяжести),

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} - \text{полная производная (так называемая субста-}$$

*циональная производная)* по времени от скорости плазмы.

Уравнение (3.5) может быть получено суммированием уравнений движения для электронов и ионов (см. формулу (2.1)) с последующим пренебрежением конечностью инерции электронов. Во многих конкретных случаях в уравнении (3.5) силой  $F$  можно пренебречь.

- *Уравнения Максвелла:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho_q = 4\pi|e|(zn_i - n_e); \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Предполагается, что все процессы медленные и токами смещения можно пренебречь, что и использовано в последнем из уравнений (3.6).

- *Закон Ома* (согласно [13]):

$$\vec{E}' = \frac{\vec{j}_\perp}{\sigma_\perp} + \frac{\vec{j}_\parallel}{\sigma_\parallel} + \frac{1}{cn_e|e|} \vec{j} \times \vec{B}, \quad (3.7)$$

где  $E'$  - эффективное поле, обусловленное в общем случае не только приложенной внешней ЭДС, но и самим движением плазмы, а также наличием электронного давления и перепада электронной температуры;  $\sigma_{\parallel, \perp}$  - продольная и поперечная (по отношению к направлению магнитного поля) проводимость плазмы;  $\frac{I}{cn_e|e|} \vec{j} \times \vec{B}$  -

*холловское поле*.

Употребительно несколько различных форм записи закона Ома для плазмы. Это связано с тем, что в зависимости от конкретных условий может оказаться наиболее существенной та или иная причина возникновения ЭДС (подробнее см.[13]). Часто используется следующая упрощенная форма записи закона Ома:

$$\vec{j} = \sigma \left\{ \vec{E} + \frac{I}{c} \vec{v} \times \vec{B} - \frac{I}{n|e|c} \vec{j} \times \vec{B} + \frac{I}{n|e|} \nabla p_e \right\}. \quad (3.8)$$

- *Уравнение состояния* – это соотношение вида:

$$p = p(\rho, T). \quad (3.9)$$

Уравнение состояния приобретает простой вид, если плазму можно считать идеальной. Для классического идеального газа, как известно, уравнение состояния

$$p = nT.$$

где  $n$  – концентрация (плотность числа частиц) газа. Для смеси двух идеальных «газов» – «газа» электронов с концентрацией  $n_e$  и «газа» ионов с концентрацией  $n_i$

$$p = n_e T_e + n_i T_i.$$

В частном случае идеальной квазинейтральной изотермической плазмы, когда температуры и концентрации ее компонент совпадают  $T_e = T_i = T$ ,  $n_e = n_i = n$ , это уравнение приобретает особенно простой вид

$$p = 2nT. \quad (3.10)$$

Но теперь в уравнениях динамики плазмы появляется дополнительный параметр – температура, и необходимо указать правило его вычисления, выражающее баланс тепла. В общем случае это достаточно сложное уравнение, учитывающее конечную теплопроводность плазмы, вязкое тепловыделение, джоулево тепло, обусловленное протеканием по плазме тока и другие источники нагре-

ва или охлаждения плазмы. Мы не будем его выписывать, детальный анализ баланса тепла в плазме можно найти, например, в [13]. Применительно к рассматриваемой одножидкостной магнитной гидродинамике в конкретных приложениях часто используются различные упрощенные подходы. Например, для медленных, существенно дозвуковых, течений, плазму приближенно можно считать несжимаемой,  $\rho = \text{const}$ , и тогда, согласно уравнению неразрывности (3.4), течение плазмы удовлетворяет условию  $\text{div} \vec{v} = 0$ , а давление плазмы определяется условием совместимости динамических уравнений. В условиях, когда теплообмен с окружающей средой несуществен, используется адиабатический закон вида  $p \sim \rho^\gamma$ . При этом изменение температуры следует соотношению  $T \sim \rho^{\gamma-1}$ . Здесь  $\gamma$  – показатель адиабаты, например, для модели одноатомного газа равный  $\gamma = 5/3$ . В общем случае, напомним,  $\gamma = 1 + 2/N$ , где  $N = 1, 2, 3 \dots$  – число степеней свободы.

Используя приведенные уравнения магнитной гидродинамики, можно описать поведение плазмы во многих весьма сложных случаях. Несомненным преимуществом такого подхода к описанию плазмы является его сравнительная простота и наглядность. Иногда это очень важно, например, при описании динамики токовых систем. При этом, конечно, в каждом конкретном случае, используя уравнения магнитной гидродинамики плазмы, необходимо иметь в виду условия (3.3) применимости гидродинамических представлений.

### § 23. Магнитное давление

Весьма важные выводы общего характера могут быть получены непосредственно из анализа уравнений (3.4) и (3.5).

В пренебрежении внешними силами  $\vec{F}$ , движение плазмы определяется силой Ампера (иначе называемой *пондеромоторной силой*) и градиентом газокINETического давления

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p. \quad (3.11)$$

Используя известное тождество из векторного анализа, справедливое для двух любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ,

$$\nabla(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\nabla)\vec{a} + \vec{a} \times \text{rot}\vec{b} + \vec{b} \times \text{rot}\vec{a},$$

и уравнение (3.6), пондеромоторную силу можно представить в виде:

$$\frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} \text{rot}\vec{B} \times \vec{B} = -\nabla \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} (\vec{B}\nabla)\vec{B} \equiv -\nabla \cdot \hat{p}_{\text{маг}}. \quad (3.12)$$

где

$$\hat{p}_{\text{маг}} = \frac{B^2}{8\pi} (\hat{\delta} - 2\vec{\tau}\vec{\tau}), \quad (3.13)$$

тензор магнитного давления;  $\hat{\delta}$  - единичная матрица, а  $\vec{\tau} = \frac{\vec{B}}{B}$  - единичный вектор, направленный по касательной к силовой линии магнитного поля. В системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль вектора  $\vec{B}$ , этот тензор записывается в виде следующей диагональной таблицы:

$$\hat{p}_{\text{маг}} = \begin{pmatrix} \frac{B^2}{8\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B^2}{8\pi} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Знак компонент тензора магнитного давления не случаен: поперечные компоненты положительны, что соответствует расталкиванию силовых линий магнитного поля в поперечном направлении, тогда как продольная компонента этого тензора отрицательна - в продольном направлении силовые линии натянуты.

Величину

$$p_m = \frac{B^2}{8\pi} \quad (3.15)$$

обычно называют *магнитным давлением*.

Полезно так переписать соотношение (3.12), чтобы расталкивание и натяжение силовых линий проявлялись в нем еще более явно. Для этого, пользуясь определением касательного вектора, запишем

$$(\bar{B}\nabla)\bar{B} = (B\bar{\tau}\nabla)(B\bar{\tau}) = B^2(\bar{\tau}\nabla)\bar{\tau} + B\bar{\tau}(\bar{\tau}\nabla B).$$

Учитывая, далее, что по определению

$$(\bar{\tau}\nabla)\bar{\tau} = \frac{\bar{n}}{R},$$

где  $\bar{n}$  - нормаль к силовой линии, а  $R$  - радиус ее кривизны, получим

$$\frac{1}{c}\vec{j} \times \bar{B} = -\nabla_{\perp} \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B^2}{4\pi R} \bar{n}, \quad (3.16)$$

где обозначено для краткости

$$\nabla_{\perp} = \nabla - \bar{\tau}(\bar{\tau}\nabla).$$

Первое слагаемое в (3.16) отвечает фарадеевскому “расталкиванию”, а второе, связанное с искривлением магнитной силовой линии, описывает влияние натяжения магнитных силовых линий, или фарадеевское “сокращение длины”. Подчеркнем, что в вакууме, то есть в области вне токов, когда  $\vec{j} \equiv 0$ , из (3.16) следует соотношение

$$\frac{\nabla_{\perp} B}{B} = \frac{\bar{n}}{R},$$

которое уже использовалось нами ранее при обсуждении дрейфового движения частиц плазмы в неоднородном магнитном поле. Обе формы записи (3.12) и (3.16) вполне равнозначны, и можно пользоваться любой из них.

Таким образом, пондеромоторная сила может быть представлена в виде суммы градиента магнитного давления и компоненты, обязанной своему появлению натяжению магнитных силовых линий. В однородном поле имеем  $R \rightarrow \infty$ , и вклад от этой компоненты обращается в нуль.

В проблеме магнитного удержания плазмы важную роль играет параметр

$$\beta = \frac{p}{p_m} = \frac{8\pi p}{B^2}, \quad (3.17)$$

определяющий отношение газокINETического давления плазмы к магнитному давлению. В зависимости от величины этого параметра принято говорить о *плазме высокого давления*, если  $\beta > 1$ , или о *плазме низкого давления*, если  $\beta < 1$ . Например, в токамаках принципиально может удерживаться только плазма низкого давления,  $\beta_{\max} < 0.1$ . В то время как в открытых ловушках в принципе возможно удержание плазмы с  $\beta \sim 1$ .

Отметим в заключение, что, так как магнитное давление, определенное формулой (3.15), является одновременно и плотностью магнитной энергии, то  $p_m$  измеряется в эрг/см<sup>3</sup>, если магнитная индукция  $B$  измеряется в гауссах.

## § 24. Равновесие плазмы в магнитной гидродинамике

Важный круг задач, в которых с успехом применяется магнитная гидродинамика, связан со стационарными течениями плазмы, т.е. с такими, когда параметры течения явно не зависят от времени и частные производные по времени в уравнениях (3.4) – (3.10) можно опустить. Частным случаем стационарных процессов являются статические равновесия, когда скорость плазмы тождественно равна нулю. Это именно равновесия, так как из условия  $\vec{v} = 0$  вытекает  $d\vec{v}/dt = 0$ , а, следовательно, действующие на любой элементарный объем плазмы силы должны быть уравновешены. При этом, как это видно из уравнения движения (3.5), должно быть выполнено условие:

$$\frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} = \nabla p. \quad (3.18)$$

Это условие и представляет собой *уравнение равновесия плазмы* в магнитной гидродинамике. Из него, очевидно, следует, что вектора  $\vec{j}$  и  $\vec{B}$  лежат на поверхностях, ортогональных к градиенту давления, то есть на поверхностях постоянного давления  $p = \text{const}$ . С другой стороны, если магнитной конфигурации сопоставить семейство магнитных поверхностей, на которых лежат силовые линии, то, очевидно, что именно на этих поверхностях давление плазмы должно быть постоянно. Таким образом, магнитные поверхности



удерживающего плазму магнитного поля с необходимостью должны быть изобарическими для плазмы.

В простейшем случае, когда силовые линии магнитного поля являются прямолинейными и параллельными друг другу, их радиус кривизны равен бесконечности, то согласно выражению (3.16) можно записать

$$\frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} = -\nabla_{\perp} \frac{B^2}{8\pi}. \quad (3.19)$$

Выбрав направление силовых линий за ось  $z$  системы координат, для единственной отличной от нуля компоненты поля  $B_z$  из уравнения соленоидальности магнитного поля

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial z} B_z = 0,$$

и магнитная индукция может меняться только поперек направления силовых линий. Воспользовавшись представлением (3.19) для силы Ампера, из уравнения (3.18) получим

$$\nabla_{\perp} \frac{B_z^2}{8\pi} + \nabla_{\perp} p = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} p = 0,$$

следовательно, давление плазмы также не меняется вдоль силовых линий, а поперек силовых линий должна быть постоянна сумма давления плазмы и магнитного давления:

$$\frac{B_z^2}{8\pi} + p = \text{const}.$$

Согласно этому условию вне области, занятой плазмой, магнитное поле является однородным, пусть здесь  $B_z = B_0$ . Тогда постоянную можно выбрать так, что во всем пространстве будет

$$\frac{B_z^2}{8\pi} + p = \frac{B_0^2}{8\pi}. \quad (3.20)$$

Видно, что в области, занятой плазмой, магнитное поле меньше внешнего. Можно сказать, что плазма «выталкивает» магнитное поле, как и любой другой диамагнетик.

Уравнение (3.20) для рассматриваемого частного случая устанавливает условие равновесного состояния системы “плазма – магнитное поле”, причем давление магнитного поля вне плазмы в равновесии должно быть больше магнитного давления внутреннего поля как раз на величину газокINETического давления плазмы, что наглядно демонстрирует идею удержания плазмы магнитным полем. Подчеркнем, что в уравнениях равновесия нет каких-либо ограничений на происхождение магнитного поля, поэтому оно может быть создано как внешними токами, так и током, протекающим по плазме. Вместе с тем условие (3.20) связывает две неизвестные величины. Поэтому для однозначного решения задачи равновесия необходимо привлекать дополнительные условия, в том числе условия поддержания тока в плазме.

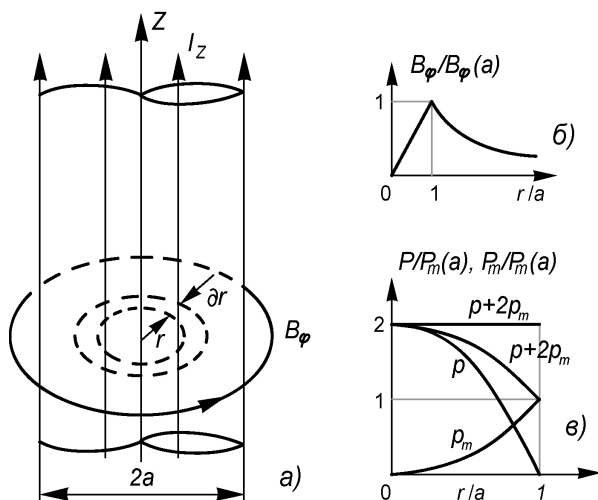


Рис.3.1. Плазменный Z-пинч: а – геометрия токового канала, б – распределение магнитного поля, в – давления плазмы ( $p$ ) и магнитного давления ( $p_m$ ) по радиусу

Примером квазистационарного процесса может служить равновесное состояние самосжимающегося длинного цилиндрического

столба плазмы с продольным током - так называемый *Z-пинч*\*. В этом случае  $B$  и  $p$  зависят только от одной координаты - расстояния  $r$  от оси столба (рис.3.1). Уравнение равновесия примет вид:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c} j_z B_\varphi.$$

Если считать ток пинча распределенным равномерно по его сечению, то  $j_z = \text{const}$  и  $B_\varphi = \frac{2}{c} \pi r j_z$ , так как по теореме о циркуляции

$$\oint B_\varphi dl_\varphi \equiv \int_0^{2\pi} B_\varphi r d\varphi \equiv B_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} J(r) \equiv \frac{4\pi}{c} \pi r^2 j_z,$$

где

$$J(r) = 2\pi \int_0^r j_z r dr = \pi r^2 j_z$$

– ток в цилиндре с радиусом  $r$ . Для области вне пинча, вновь воспользовавшись теоремой о циркуляции, получаем:

$$\oint B_\varphi dl_\varphi \equiv \int_0^{2\pi} B_\varphi r d\varphi \equiv B_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I \equiv \frac{4\pi}{c} \pi a^2 j_z,$$

где  $I$  – полный ток пинча. Таким образом, распределение магнитного поля пинча следующее (рис. 3.1,б):

$$B_\varphi(r) = B_\varphi(a) \begin{cases} \frac{r}{a}, & r \leq a \\ \frac{a}{r}, & r > a \end{cases},$$

где

$$B_\varphi(a) = \frac{2I}{ca}$$

магнитное поле на границе плазмы.

Отметим попутно полезную практическую формулу для расчета величины этого поля:

\* Разряд с геометрией *Z-пинча* возникает, например, при пропускании сильного тока через газ между двумя параллельными электродами, расположенными перпендикулярно оси  $z$ .

$$B_{\varphi}(Гс) = \frac{0.2I(A)}{a(м)},$$

Подстановка распределения поля в уравнение равновесия приводит к соотношению

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2\pi}{c^2} j_z^2 r.$$

Интегрируем и, учитывая, что на границе столба (при  $r=a$ ) газодинамическое давление равно нулю ( $p=0$ ), получаем

$$p = \frac{\pi a^2}{c^2} j^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{I^2}{\pi a^2 c^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \equiv \frac{B_{\varphi}^2(a)}{4\pi} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Подчеркнем, что сумма давлений магнитного поля и давления плазмы

$$p + \frac{B_{\varphi}^2(r)}{8\pi} = \frac{B_{\varphi}^2(a)}{8\pi} \left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right) \neq const$$

теперь не является величиной постоянной (сравним с (3.20)). Очевидно, это связано с вкладом от натяжения силовых линий, которые здесь имеют форму окружностей с конечным радиусом кривизны. Постоянной теперь является величина

$$p + \frac{B_{\varphi}^2(r)}{8\pi} - \left(-\frac{B_{\varphi}^2(r)}{8\pi}\right) \equiv p + \frac{B_{\varphi}^2(r)}{4\pi} = \frac{B_{\varphi}^2(a)}{4\pi} = const.$$

Вклад натяжения силовых линий приводит к тому, что давление плазмы в центре токового канала оказывается ровно вдвое больше магнитного давления на его границе. Распределение давлений в токовом канале показано на (рис. 3.1,в).

Так как  $p=2nT$ , то, вводя полное число частиц на единицу длины плазменного столба  $N$  (так называемое *погонное число частиц*) и считая температуру плазмы  $T$  постоянной, определим

$$N = 2\pi \int_0^a nr \, dr = \frac{I^2}{4c^2 T},$$

откуда получаем соотношение

$$4NT = \frac{I^2}{c^2},$$

известное как *соотношение Беннета*.

При выводе этого соотношения нами предполагалось, что температура плазмы постоянна. Однако проводимость реальной плазмы не бесконечна, и поэтому протекание тока будет сопровождаться выделением джоулева тепла и нагревом плазмы. Если этот процесс считать медленным, то условие равновесия можно считать, по крайней мере, приближенно справедливым. Следовательно, если при постоянном погонном числе частиц температура будет расти, то для обеспечения равновесия необходимо увеличивать ток.

К сожалению, в обсуждаемой выше геометрии разряда практически не удастся довести плазменный столб до равновесного состояния, так как ряд процессов приводит к неустойчивости, и столб плазмы быстро разрушается. Плазменный столб в Z-пинче опирается на электроды, значит вдоль столба уход частиц и потери энергии в области контакта неизбежны. Естественно желание свернуть столб плазмы в тор – создать замкнутую безэлектродную систему. Однако тороидальный виток с током стремится к расширению, потому что давление магнитного поля на внутреннюю поверхность витка больше, чем на наружную. Например, на любой участок витка  $\Delta_1 J$  действует отталкивающая сила от диаметрально противоположного участка витка  $\Delta_2 J$  (рис.3.2),

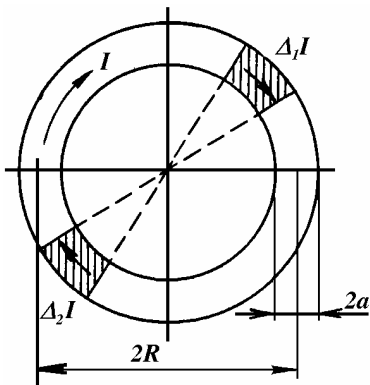


Рис.3.2. Геометрия тороидального витка плазмы

поскольку, как известно, антипараллельные токи отталкиваются. Чтобы обеспечить равновесие плазменного витка, его можно было бы поместить в вертикальное магнитное поле  $B_z$ , направленное по оси  $z$ , перпендикулярной плоскости витка (плоскости рис.3.2). Тогда силы, растягивающие виток  $F_1 \sim J^2$ , могут быть скомпенсированы силами, сжимающими его,  $F_2 \sim JB_z$ . Расчеты [10] показывают, что при этом равновесие достигается, если

$$B_z = \frac{J}{cR} \left( \ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{2} \right),$$

где  $J$  - полный ток в плазменном витке.

Равновесное состояние витка может быть получено также (на временах масштаба скиновых), если его поместить в хорошо проводящий металлический кожух. Смещение витка приводит к возникновению токов Фуко в кожухе, и магнитные поля этих токов играют роль поля  $B_z$ . В этом случае время существования равновесного состояния зависит от соотношения радиуса плазменного шнура  $a$ , радиуса камеры тора  $R$ , проводимости и толщины  $\Delta r$  проводящего кожуха.

Стабилизация положения плазменного витка с током вертикальным магнитным полем и проводящим массивным металлическим кожухом реально использовались в токамаках для обеспечения равновесия по большому радиусу тора. Равновесие по малому радиусу обеспечивается (в совокупности с полем тока) сильным тороидальным магнитным полем.

Магнитогидродинамический метод рассмотрения дает возможность качественно и наглядно представить условия равновесия плазменного шнура различной геометрии, а расчеты позволяют оценить необходимые соотношения макроскопических параметров.

## § 25. Быстрые процессы

В уравнении (3.18) инерцией плазмы пренебрегаем. Однако при быстрых процессах это недопустимо. Более того, опыт показал, что на первых стадиях развития импульсного разряда можно пренебречь газокINETическим давлением по сравнению с инерционным членом. При быстром процессе пробой газа происходит первоначально по периферии разрядной камеры. В формировании плазменной оболочки существенную роль играют элементарные процессы – ионизация, рекомбинация и перезарядка. На этой стадии образуется тонкий проводящий цилиндр плазмы. По мере разогрева и роста тока эта плазменная оболочка отрывается от стенки камеры, сжимается к центру, ионизует и “сгребает” при сжатии находящийся внутри нее нейтральный или слабо ионизованный газ, вовлекая его в движение к центру. Такой процесс получил название движущейся магнитной стенки (в английской литературе сложился термин *snow-plow* – снежный плуг) и теоретически был рассмотрен

в СССР Леонтовичем и Осовцом [16], а в США - Розенблютом. После схождения плазменной оболочки к оси в центре камеры образуется цилиндрический плазменный «столб», сжимающийся под действием магнитного поля собственного тока и, в результате, быстро разогревающийся - по этой причине пренебречь давлением плазмы уже нельзя. По мере разогрева давление плазмы растет и тормозит процесс дальнейшего сжатия. Эта стадия завершается образованием цилиндрического токового канала, почти равновесного, но, как показали эксперименты, неустойчивого, вскоре разрушающегося, главным образом, за счет развития перетяжек, ведущих к обрыву тока, и изгибов-змеек, разрушающих токовый канал. На заключительной стадии разряда, когда токовый канал разрушается, возникают электромагнитные поля, приводящие к ускорению части частиц плазмы, всплеску рентгеновского излучения и нейтронному излучению, если разряд производится в дейтерии. Мощный импульсный разряд, в котором реализуется описанная выше (весьма фрагментарно!) совокупность событий, получил название *Z-пинч*, главным образом за счет геометрии цилиндрической разрядной камеры, ось которой принято обычно выбирать за ось  $z$  системы координат.

На фазе движения плазменной оболочки к оси, сопровождающемся сгребанием газа и ростом массы плазмы, радиальная координата плазменной оболочки, которая считается тонкой, согласно теории Леонтовича – Осовца [16], определяется уравнением:

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dr}{dt} \right) = \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B})_r \cdot 2\pi r \equiv -\frac{B_\varphi^2}{8\pi} \cdot 2\pi r, \quad (3.21)$$

где  $m$  – масса единицы длины шнура плазмы

$$m = m_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad m_0 = \pi \rho a^2,$$

где  $a$  – начальный радиус оболочки,  $m_0$  - начальная масса газа в разрядной камере на единицу длины вдоль оси;

$$B_\varphi = \frac{2I(t)}{cr}$$

магнитное поле тока снаружи от плазменной оболочки. Внутри оболочки при цилиндрической симметрии магнитное поле, очевидно, равно нулю. По этой причине в правой части уравнения (3.21),

представляющей собой радиальную силу, действующую на оболочку в расчете на единицу ее длины вдоль оси, знак обязательно должен быть отрицательным! Иногда в левую часть (3.21) вводят дополнительный коэффициент  $k$ , учитывающий долю захватываемой массы и равный единице при полном сгребании.

Для определения величины разрядного тока  $I(t)$  необходимо дополнительное уравнение – электротехническое уравнение цепи для разрядного контура. Это, конечно, усложняет решение. Но на начальной стадии можно полагать, что ток растет линейно по времени, так что

$$I(t) = I_0 t,$$

где  $I_0$  – темп нарастания тока (здесь постоянная величина), определяемый электротехническими параметрами разрядной цепи.

Решение уравнения (3.21) для линейно нарастающего тока дано в [12]. Оно предсказывает, что в определенный момент времени

$$t = t_{\text{особ}} = 1.5 (ac / I_0)^{1/2} m_0^{1/4}, \quad (3.22)$$

называемый моментом особенности, плазменная оболочка схлопывается на оси системы. Момент особенности реально наблюдается на эксперименте (но, конечно, сжатия до нулевого радиуса не происходит), причем предсказания с помощью формулы (3.22) удивительно точно соответствуют наблюдениям (подробнее см. [12], типичные значения  $t_{\text{особ}}$  составляют 2 - 10 мкс). Заметим, что величина  $t_{\text{особ}}$  определяется, фактически, только начальными значениями величин.

В настоящее время изучено экспериментально целое семейство различных модификаций Z-пинча, некоторые из представителей которого схематично показаны на рис. 3.3. Многообразие модификаций разрядных устройств такого типа не случайно: по сути дела, вся история исследований в области управляемого термоядерного синтеза берет начало от мощных импульсных разрядов в газе, в которых впервые были обнаружены «термоядерные» нейтроны и которые длительное время были рекордсменами по параметру  $n\tau$  – произведению концентрации плазмы на время удержания. Многие свои позиции ввиду целого ряда уникальных свойств пинчи не утратили до сих пор.



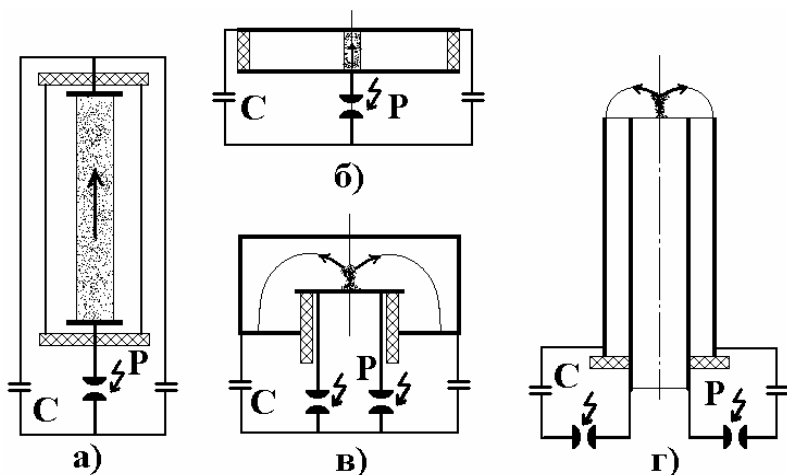


Рис. 3.3. Разновидности цилиндрического (а,б) и нецилиндрического (в,г) Z-пинча: а – классический Z-пинч, б – микропинч, в – плазменный фокус Филиппова, г – пушка Мейзера. Р – разрядник, С – батарея конденсаторов, стрелка – направление тока

## § 26. Взаимное проникновение плазмы и магнитного поля

Магнитное давление действует на проводник в направлении перпендикулярном к магнитным силовым линиям, в течение времени, меньшем скин-времени  $t < \tau_s$ . За время, большее скин-времени  $t > \tau_s$ , магнитное поле успевает “просочиться” в проводник и величины индукции магнитного поля внутри и вне проводника выравниваются. В случае, когда рассматривается проникновение магнитного поля в плазму, нужно учитывать, что процесс проникновения взаимный – не только поле проникает в плазму, но и плазма проникает в магнитное поле, например, за счет диффузии, имеющей место и в случае, когда магнитное поле однородно.

Проникновение поля в проводник с постоянной проводимостью  $\sigma$ , или, что то же самое, в однородную неподвижную плазму с постоянной температурой, формально аналогично диффузии, так как описывается (приближенно) сходным уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = D_{\text{mag}} \Delta \vec{B}, \quad (3.23)$$

с коэффициентом магнитной диффузии  $D_{\text{mag}}$ , определяемым формулой (3.2).

Хорошо известно, что это уравнение описывает обычный скин-эффект. Глубина проникновения поля  $l_m$  растет со временем по закону

$$l_m \sim \sqrt{D_{\text{mag}} t}.$$

В противоположном случае, когда плазма помещена в постоянное однородное магнитное поле, ее граница постепенно размывается и это размывание границы плазмы связано с движением частиц поперек поля. А это возможно только при столкновении частиц, т.е. в процессе поперечной диффузии. Этот процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} n = \text{div}(D_{\perp} \nabla n), \quad (3.24)$$

где

$$D_{\perp} = \frac{\langle \rho_e \rangle^2}{\tau_{ei}}. \quad (3.25)$$

Величина размывания границы плазмы  $l_p$  за время  $t$  определяется теперь выражением:

$$l_p \sim \sqrt{D_{\perp} t}.$$

Любопытно отметить, что формально имеет место соотношение [17]

$$D_{\perp} = \frac{1}{2} \beta D_{\text{mag}}, \quad (3.26)$$

и, следовательно, за то же самое время толщина слоя проникновения плазмы низкого давления с  $\beta < 1$  в однородное поле оказывается в  $\sqrt{\beta/2}$  раз меньше толщины слоя проникновения поля в однородную неподвижную плазму.

Важно выяснить, какой процесс является доминирующим, когда имеет место взаимная диффузия плазмы и магнитного поля, т.е. в случае, когда и плазма и поле являются неоднородными. В общем виде это сложная задача, но достаточно простое ее решение можно получить, если ограничиться случаем плазмы низкого давления. Процесс диффузии является нестационарным, но обычно его мож-

но считать медленным на масштабах времен установления равновесия плазмы. Иными словами, описывая диффузию, в уравнении движения (3.11) можно пренебречь инерцией, и принять, что

$$\frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p \approx 0. \quad (3.27)$$

Считая это условие выполненным, из закона Ома (3.8) получим величину напряженности электрического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{2n|e|} \nabla p. \quad (3.28)$$

Стремясь максимально упростить описание, ограничимся случаем диффузии плазмы с постоянной температурой  $T = \text{const}$  в неоднородном магнитном поле с прямыми силовыми линиями, ориентированными вдоль оси  $z$  системы координат. Считаем, что вдоль этого направления поле и плазма однородны. В этих условиях подстановка поля  $\vec{E}$  из (3.28) в закон индукции

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

с последующим использованием уравнения непрерывности (3.4), которое здесь удобно записать в виде

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dt} = -\text{div } \vec{v}, \quad (3.29)$$

приводит к соотношению

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{B_z}{n} \right) = D_{\text{маг}} \frac{\Delta B_z}{n}. \quad (3.30)$$

Учтем далее, что (3.27) эквивалентно следующему условию

$$\frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p = -\nabla_{\perp} \left( \frac{B_z^2}{8\pi} + p \right) \approx 0.$$

Оно означает, что суммарное давление плазмы и магнитного поля поддерживается постоянным:

$$\frac{B_z^2}{8\pi} + p = \frac{B_0^2}{8\pi}, \quad (3.31)$$

где  $B_0$  считается заданной величиной. Заметим, что при выводе (3.29) – (3.31) явно никак не использовалась предполагаемая ма-

лость величины  $\beta$ , так что в этом плане они являются пока точными. Учтем эту малость, тогда, введя для удобства промежуточное обозначение,

$$\beta_0 = \frac{8\pi p}{B_0^2} \ll 1,$$

из (3.30) приближенно получаем величину магнитной индукции

$$B_z \cong B_0 \left(1 - \frac{1}{2} \beta_0\right). \quad (3.32)$$

Поскольку величина  $\beta_0$  здесь пропорциональна концентрации плазмы, то, используя это соотношение, можно показать (предлагаем читателю в качестве упражнения проделать этот несложный вывод самостоятельно), что уравнения (3.29), (3.30) сводятся к одному

$$\frac{\partial}{\partial t} n = \operatorname{div} \left( \frac{1}{2} \beta_0 D_{\text{маг}} \nabla n \right), \quad (3.33)$$

формально совпадающему с уравнением диффузии плазмы в однородном поле (3.24). Теперь, однако, в силу (3.32), магнитное поле однозначно связано с плотностью плазмы, поэтому можно сказать, что оно «автоматически подстраивается» под медленно меняющуюся за счет диффузии плотность плазмы.

Уравнение (3.33) является нелинейным, его решение - непростая задача. Для иллюстрации взаимного проникновения плазмы и магнитного поля рассмотрим частный случай диффузионного расплывания заданного одномерного скачка плотности плазмы. Упрощение достигается здесь за счет того, что все точки профиля плотности движутся по подобным траекториям, по закону диффузии должно быть  $x \sim \sqrt{t}$ , и можно ввести, как говорят, *автомодельную переменную*,

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2} D_{\text{маг}} \beta_{\text{max}} t}} \quad (3.34)$$

где  $\beta_{\text{max}}$  - нормировка, такая что

$$\beta(x, t) = f(\xi) \beta_{\text{max}}. \quad (3.35)$$

Профиль  $f(\xi)$ , как следует из (3.33), удовлетворяет уравнению  $\frac{d}{d\xi} \left( f \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{2} \frac{df}{d\xi} = 0$ ,

решения которого для нескольких значений величины скачка плотности приведены на рис. 3.4.

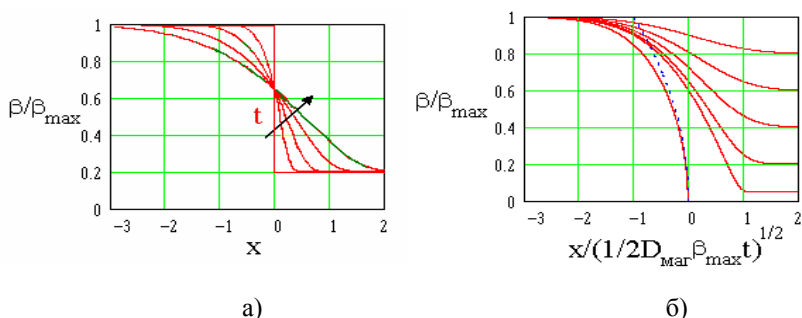


Рис. 3.4. Диффузионное расплывание скачка плотности плазмы: а – авто-модельные профили для нескольких значений величины скачка (пунктир -  $|\xi|^{1/2}$ ); б – эволюция скачка плотности с ростом времени

Произвольный скачок плотности постепенно размывается с течением времени (рис. 3.4,б). Заметим, что скачок размывается в обе стороны от его начального положения, только если плотность плазмы первоначально была не нулевой по обе стороны от него. Если же плотность плазмы тождественно равна нулю с одной стороны от скачка (например, справа, как показано на рис. 3.4,а), то проникновение плазмы в эту область оказывается невозможным. Это неудивительно, так как при нулевой плотности плазмы коэффициент поперечной диффузии тождественно обращается в нуль и, в рамках применимости уравнения (3.33), диффузия оказывается невозможной. В этих условиях предположения, заложенные при выводе (3.33), очевидно, должны быть уточнены.

## ГЛАВА 4

### КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ

Это очень интересный, но весьма сложный раздел физики плазмы. Плазма имеет много степеней свободы, ее свойства сильно меняются при наложении магнитного поля (возникает сильная анизотропия). По этой причине спектр возможных в ней колебаний и волн является весьма широким. Мы рассмотрим лишь некоторые, наиболее характерные примеры для изотропной (незамагниченной) плазмы и распространение простейших типов волн в замагниченной плазме. Более подробное изложение можно найти, например, в [18,19]. Обычно классификация типов волн начинается с разделения их на продольные и поперечные волны. Для механических волн продольность или поперечность волны связывают с характером движения в ней частиц – вдоль или поперек направления распространения волны. Например, звуковые волны, с помощью которых лектор доводит до своих слушателей информацию об обсуждаемом предмете, являются продольными – сгущения и разрежения газа, по сути дела и представляющие собой звуковую волну, происходят в направлении ее распространения. Для электромагнитной волны ее продольность или поперечность определяется взаимной ориентацией вектора распространения волны (волнового вектора) и вектора электрического поля волны. Если волновой вектор и вектор электрического поля волны коллинеарны, то такая волна является продольной. Если же плоскость колебаний вектора электрического поля перпендикулярна направлению распространения волны, то такая волна является поперечной. Примером строго поперечной волны может служить электромагнитная волна – свет – в вакууме. Для поперечных волн в поперечной по отношению к направлению распространения волны плоскости, очевидно, можно ввести два независимых взаимно перпендикулярных направления.

Соответственно, говорят о двух независимых поляризациях волны. В плазме, независимо от наличия или отсутствия внешнего магнитного поля, возможно распространение и продольных и поперечных волн, причем при наличии внешнего магнитного поля возможно распространение и продольных и поперечных волн как вдоль, так и поперек этого магнитного поля. В связи с этим важно не путать характер волны – продольная она или поперечная – и характер ее распространения: вдоль или поперек магнитного поля, в которое помещена плазма.

С возникновением и раскачкой колебаний и волн в плазме непосредственно связаны многие неустойчивости плазмы, которые будут обсуждаться в заключительном разделе этой главы.

### **§ 27. Дисперсионные уравнения для продольных и поперечных волн малой амплитуды**

Напомним кратко основные сведения из физики волновых процессов. Основным соотношением, определяющим условия распространения волны в данной среде, является закон дисперсии, устанавливающий связь частоты колебаний и волнового вектора:

$$\omega = \omega(\vec{k}). \quad (4.1)$$

Закон дисперсии позволяет определить фазовую скорость волны

$$\vec{v}_\phi = \frac{\omega(\vec{k})}{k} \cdot \frac{\vec{k}}{k}, \quad (4.2)$$

и ее групповую скорость

$$\vec{v}_{gp} = \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial \vec{k}}. \quad (4.3)$$

Групповая скорость волны определяет перенос волновой энергии и поэтому никогда не может превышать скорость света в вакууме

$$v_{gp} < c.$$

Фазовая скорость – скорость перемещения в волне точек с постоянной фазой – не связана с переносом волной энергии, а потому не ограничена величиной скорости света. В принципе, она может быть любой по величине, в том числе и больше скорости

света, если это позволяет закон дисперсии. Дисперсионные свойства данной среды, если ограничиться областью волн малой амплитуды, можно установить, рассматривая отклик среды на малое воздействие. Для волн конечной амплитуды ситуация сложнее: такие волны изменяют свойства среды, в которой распространяются. Упрощенно это можно трактовать как появление зависимости частоты колебаний от амплитуды волны  $a$ :

$$\omega = \omega(\vec{k}, a). \quad (4.4)$$

Такова ситуация для слабо нелинейных волн, например, ленгмюровских *солитонов* [17].

Ограничимся здесь рассмотрением волн малой амплитуды. Универсальный подход, справедливый для волн любой природы, заключается в следующем. Электромагнитное поле волны  $\vec{E}, \vec{B}$  следует определять из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \tilde{\rho}_q, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь  $\tilde{\rho}_q, \vec{j}$  – наведенная в среде полем волны плотность электрического заряда и плотность тока. Эти величины не являются полностью независимыми, а, как это следует из (4.5), связаны соотношением

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_q}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}, \quad (4.6)$$

выражающим собой закон сохранения заряда. В этом нетрудно убедиться, применив операцию дивергенции ко второму уравнению системы (4.5). Поскольку коэффициенты уравнений (4.5), (4.6) явно не содержат координат и времени, можно искать решение в виде гармонической волны  $\sim \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$ . Так как



производные по времени и координатам от гармонической волны такого вида сводятся к алгебраическому домножению на  $(-i\omega)$  и  $(i\vec{k})$  соответственно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}) = (-i\omega) \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}),$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}) = (i\vec{k}) \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}),$$

то уравнения (4.5) при такой подстановке превращаются в алгебраические:

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{\tilde{E}} &= \frac{\omega}{c} \vec{\tilde{B}}, \\ i\vec{k} \times \vec{\tilde{B}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{i\omega}{c} \vec{\tilde{E}}, \\ i\vec{k} \vec{\tilde{E}} &= 4\pi\vec{\rho}_q, \\ \vec{k} \vec{\tilde{B}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Первое из этих соотношений выражает магнитное поле волны через электрическое

$$\vec{\tilde{B}} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{\tilde{E}},$$

и при таком определении, очевидно, последнее из соотношений (4.7) становится тождеством. Таким образом, соотношения (4.7) сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} i\frac{c}{\omega} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{\tilde{E}}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{i\omega}{c} \vec{\tilde{E}}, \\ i\vec{k} \vec{\tilde{E}} &= 4\pi\vec{\rho}_q. \end{aligned} \quad (4.8)$$

До сих пор мы не высказывали никаких предположений о связи наведенной волной в среде плотности тока (или заряда) и ее электромагнитного поля. Как это принято, для волн малой амплитуды эта связь предполагается линейной:

$$\vec{j} = \hat{\sigma}(\omega, \vec{k}) \vec{E}, \quad (4.9)$$

а набор соответствующих коэффициентов пропорциональности составляет *тензор проводимости*  $\hat{\sigma}$ , зависящий от свойств рассматриваемой среды, а также, вообще говоря, от частоты волны и волнового вектора. По определению этот тензор связан с *тензором диэлектрической проницаемости*  $\hat{\varepsilon}(\omega, \vec{k})$  среды соотношением:

$$\hat{\varepsilon}(\omega, \vec{k}) = \hat{\delta} + \frac{4\pi i}{\omega} \hat{\sigma}(\omega, \vec{k}), \quad (4.10)$$

где первое слагаемое – единичная диагональная матрица. Поскольку, в силу (4.6), наведенная плотность заряда должна быть связана с наведенной плотностью тока соотношением

$$\omega \vec{\rho}_q = \vec{k} \vec{j},$$

то второе из соотношений (4.8) фактически является следствием первого. По этой причине, с учетом определения тензора диэлектрической проницаемости, после простых преобразований приходим к однородной алгебраической задаче:

$$\left( \frac{\varepsilon_{ij}}{N^2} - \delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{k^2} \right) E_j = 0, \quad (4.11)$$

где величина

$$N^2 = \left( \frac{kc}{\omega} \right)^2 \quad (4.12)$$

представляет собой квадрат показателя преломления волны. Однородная задача (4.11), как известно, имеет ненулевое решение не всегда, а только при выполнении дополнительного условия. А именно, детерминант входящей в (4.11) матрицы должен быть равен нулю:

$$\text{Det} \left( \frac{\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})}{N^2} - \delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = 0. \quad (4.13)$$

Это условие и представляет собой *дисперсионное уравнение*, определяющее закон дисперсии (4.1) волн, способных существовать в данной среде. Если дисперсионное уравнение

имеет несколько решений, то о них говорят как о *ветвях* или о *модах собственных колебаний*.

Если среда, в которой рассматривается распространение волны, изотропна, так что единственным выделенным направлением является направление распространения самой волны, то среди всех компонент тензора диэлектрической проницаемости отличны от нуля лишь две компоненты – продольная  $\varepsilon_l$  и поперечная  $\varepsilon_{tr}$  по отношению к направлению распространения волны (здесь индексы  $l$  и  $tr$  – начальные буквы английских терминов longitudinal – продольный и transversal - поперечный). В этом случае этот тензор оказывается следующим:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{tr} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \varepsilon_l \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (4.14)$$

а дисперсионное уравнение, как легко проверить, приводится к виду:

$$\text{Det} \left( \frac{\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})}{N^2} - \delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = \frac{\varepsilon_l}{N^2} \left( \frac{\varepsilon_{tr}}{N^2} - 1 \right)^2 = 0.$$

Таким образом, как мы видим, существуют две возможности выполнить это условие:

$$\varepsilon_l = 0, \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_{tr} = N^2. \quad (4.16)$$

Первая из них отвечает продольным волнам, а вторая – поперечным. Полезно отметить, что если пространственная дисперсия (т.е. зависимость компонент тензора диэлектрической проницаемости от волнового вектора) несущественна, то продольная и поперечная компоненты совпадают

$$\varepsilon_l = \varepsilon_{tr} \equiv \varepsilon,$$

и можно говорить лишь об одной величине  $\varepsilon$  - диэлектрической проницаемости среды. Она и определяет дисперсионные уравнения для продольных

$$\varepsilon = 0, \quad (4.17)$$

и поперечных волн

$$\varepsilon = N^2. \quad (4.18)$$

Например, в вакууме, когда, очевидно, проводимость равна нулю, получаем из (4.10)

$$\varepsilon_{\text{вак}} = 1,$$

поэтому, согласно (4.17), продольные волны невозможны, а закон дисперсии поперечных волн, как это следует из (4.18) и (4.12), оказывается следующим

$$\omega = kc.$$

Напомним, что поперечные волны могут иметь два независимых направления поляризации.

Подчеркнем в заключение, что если плазма анизотропна, например, помещена в магнитное поле, или в ней распространяется пучок частиц, так что существует явно выделенное направление, то представление (4.14) для тензора диэлектрической проницаемости не справедливо, но закон дисперсии для продольных (или, точнее, «почти» продольных, подробнее см. [20]) волн по-прежнему определяется уравнением (4.15), если под «продольной» диэлектрической проницаемостью понимать величину

$$\varepsilon_l \equiv \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}.$$

## **§28. Метод малых колебаний. Диэлектрическая проницаемость немагнитной плазмы**

Как следует из изложенного в предыдущем параграфе, все свойства волн, способных распространяться в данной среде, в том числе и в плазме, определяются ее диэлектрической проницаемостью. Поэтому наша ближайшая цель – установить и исследовать диэлектрические свойства плазмы. Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных плазменных волн напомним два результата, которые мы уже обсуждали ранее. Во-первых, диэлектрическая проницаемость холодной плазмы должна определяться соотношением (см. § 11):

$$\varepsilon = 1 - \left( \omega_p / \omega \right)^2, \quad \omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \quad (4.19)$$

где  $\omega$  – частота колебаний, а  $\omega_p$  – ленгмюровская (или плазменная) частота. Возникает вопрос, какую плазму можно назвать холодной? Для ответа на этот вопрос, очевидно, надо сопоставить характерные скорости движения частиц плазмы и фазовые скорости плазменных волн. Для равновесной плазмы характерная скорость движения частиц (в отсутствие волны!) – это тепловая скорость (большая для электронов плазмы), поэтому, применительно к условиям распространения волн, плазму можно считать холодной при выполнении условия:

$$v_\phi \equiv \frac{\omega}{k} \gg v_{T_e}, v_{T_i}. \quad (4.20)$$

Поскольку это условие ограничивает частоту волн снизу, то оно отвечает высокочастотному пределу, а, следовательно, формула (4.19) определяет диэлектрическую проницаемость плазмы *в высокочастотном пределе*. Во-вторых, напомним, что при обсуждении дебаевской длины экранирования (см. §3 и §11) было получено уравнение экранировки

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi}{r_D^2}, \quad (4.21)$$

где  $r_D$  - радиус Дебая для плазмы. Экранировка здесь рассматривается как статический процесс, поэтому уравнение (4.21) отражает диэлектрические свойства плазмы в статическом пределе. Полагая в (4.21)

$$\varphi \sim e^{ikr},$$

приходим к следующему результату:

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}, \quad \frac{1}{r_D^2} \equiv \frac{1}{r_{De}^2} + \frac{1}{r_{Di}^2}, \quad (4.22)$$

определяющему диэлектрическую проницаемость плазмы *в статическом пределе*, справедливом при выполнении условия, обратного по отношению к (4.19):

$$v_\phi \equiv \frac{\omega}{k} \ll v_{T_i}, v_{T_e}. \quad (4.23)$$

Подчеркнем, что в обоих предельных случаях структура  $\varepsilon$  оказывается следующей:

$$\varepsilon = I + \delta\varepsilon_e + \delta\varepsilon_i.$$

Первое слагаемое здесь – единица – вклад вакуума, а остальные два отвечают вкладу электронов и ионов соответственно. Вклад различных компонент оказывается аддитивным вследствие отсутствия взаимодействия между ними.

Чтобы составить более полную картину диэлектрических свойств немагнитной плазмы, воспользуемся методом малых колебаний. Для упрощения, и здесь следует сразу оговориться, будем пренебрегать эффектами резонансных с волной частиц. Резонансные эффекты играют принципиальную роль во многих плазменных явлениях – например, в механизме бесстолкновительного затухания Ландау, но их учет требует усложнения описания плазмы, поэтому пока их не будем затрагивать.

Суть метода малых колебаний заключается в следующем. При воздействии на первоначально невозмущенную плазму волны малой амплитуды логично ожидать появления малого отклика, поэтому можно воспользоваться разложением величины этого отклика по амплитуде волны, пренебрегая нелинейными эффектами. Кроме того, без учета резонансных эффектов, движение частиц плазмы, индуцируемое волной, можно рассматривать с помощью гидродинамических уравнений, записав для каждого сорта частиц уравнения движения и уравнения сохранения вещества.

Рассмотрим простейший пример: идеальную холодную плазму без пучков. Это значит, что мы пренебрежем тепловой скоростью частиц по сравнению со скоростью, приобретаемой ими в самосогласованных полях. Этот простой пример является удобной отправной точкой для более сложных ситуаций. В невозмущенном равновесном состоянии полагаем, что плотность плазмы однородная  $n_{oe} = Zn_{oi} = n_o = const$ , нет внешнего электрического поля  $E_o = 0$  и потоков частиц  $\vec{v}_{oe} = \vec{v}_{oi} = 0$ . Под воздействием поля волны

частицы плазмы придут в движение, получив ускорение, определяемое уравнениями движения:

$$m_e n_{0e} \frac{\tilde{\mathcal{A}}_e}{\tilde{\mathcal{A}}} = -|e| n_{0e} \tilde{E}, \quad (4.24)$$

$$M_i n_{0i} \frac{\tilde{\mathcal{A}}_i}{\tilde{\mathcal{A}}} = Z|e| n_{0i} \tilde{E}.$$

При записи (4.24) учли, что поле имеет малую амплитуду, поэтому все нелинейные слагаемые опущены. По этой же причине в правых частях фигурирует лишь действующая на частицы сила, обусловленная электрическим полем волны. Действуя по рецепту, предложенному в предыдущем параграфе, считаем поле волны и скорости гармоническими,

$$\tilde{E}, \tilde{v}_{e,i} \sim e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}.$$

Далее, с помощью (4.24) вычисляем скорости электронов и ионов, а затем и плотность тока, индуцируемого волной. Результат оказывается следующим:

$$\tilde{j} \equiv |e|(Z^2 n_{0i} \tilde{v}_i - n_{0e} \tilde{v}_e) = \frac{i}{\omega} \left( \frac{e^2 n_{0e}}{m_e} + \frac{Z^2 e^2 n_{0i}}{M_i} \right) \tilde{E}.$$

Коэффициент пропорциональности между плотностью тока и напряженностью поля волны дает величину проводимости плазмы, которая в рассматриваемом пределе оказывается равной

$$\hat{\sigma} = \frac{i}{\omega} \left( \frac{e^2 n_{0e}}{m_e} + \frac{Z^2 e^2 n_{0i}}{M_i} \right). \quad (4.25)$$

Вклад в проводимость дают обе компоненты плазмы, но, естественно, не в равной мере. Обычно электронный вклад является доминирующим. Воспользовавшись теперь определением (4.10), можно вычислить диэлектрическую проницаемость, которая, как нетрудно проверить, совпадет с приведенной выше величиной (4.19).

Усложним модель плазмы, вводя в рассмотрение возможность передачи импульса в столкновениях между ионами и электронами. Учет этого эффекта приводит к появлению в уравнениях движения

дополнительных слагаемых, происхождение которых – взаимное трение компонент плазмы:

$$\begin{aligned} m_e n_{0e} \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial t} &= -|e| n_{0e} \tilde{E} - n_{0e} m_e \frac{\tilde{v}_e - \tilde{v}_i}{\tau_{ei}}, \\ m_i n_{0i} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} &= Z|e| n_{0i} \tilde{E} + n_{0e} m_e \frac{\tilde{v}_e - \tilde{v}_i}{\tau_{ei}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Вычисление скоростей компонент плазмы теперь несколько усложняется, но его можно упростить, если учесть следующее обстоятельство. Заметим, что любой выделенный единичный объем плазмы в нашей модели является нейтральным по заряду. Поэтому действующие на него электрические силы компенсируют друг друга. Кроме того, передача импульса между ионами и электронами не меняет в целом импульса выделенного объема плазмы! Поэтому, если импульс этого единичного объема первоначально был нулевым, то он остается таковым и в дальнейшем:

$$m_e n_{0e} \tilde{v}_e + M_i n_{0i} \tilde{v}_i = 0.$$

Это соотношение позволяет выразить одну скорость через другую, например ионную скорость через электронную скорость:

$$\tilde{v}_i = -\frac{m_e n_{0e}}{M_i n_{0i}} \tilde{v}_e = -\frac{Z m_e}{M_i} \tilde{v}_e.$$

Уравнения (4.26) в результате сводятся к одному, например, уравнение движения электронов будет следующим:

$$m_e n_{0e} \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial t} = -|e| n_{0e} \tilde{E} - n_{0e} m_e \frac{1 + Z m_e / M_i}{\tau_{ei}} \tilde{v}_e,$$

и теперь уже несложно вычислить скорости и с их помощью плотность электрического тока. Для гармонической волны она оказывается равной:

$$\tilde{j} = \hat{\sigma} \tilde{E}, \quad \hat{\sigma} = \frac{i(1 + Z m_e / M_i)}{\omega + i \nu_{ei} (1 + Z m_e / M_i)} \frac{e^2 n_0}{m_e}, \quad (4.27)$$



и вновь пропорциональной полю волны. Здесь  $\nu_{ei} = \tau_{ei}^{-1}$  – частота электрон-ионных столкновений,  $\hat{\sigma}$  – проводимость плазмы. Для диэлектрической проницаемости получаем:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega[\omega + i\nu_{ei}(1 + Zm_e/M_i)]}. \quad (4.28)$$

Как мы видим, она становится величиной комплексной. Это является следствием того, что столкновения приводят к затуханию колебаний, то есть к диссипации энергии. Заметим, что в (4.28) теперь уже нельзя выделить отдельно вклад ионов и электронов - аддитивность вкладов нарушается из-за взаимодействия компонент плазмы. Подчеркнем еще одно важное обстоятельство. Используемые в (4.26) выражения для плотности сил взаимного трения между электронами и ионами

$$f_{ei} = -n_{0e}m_e \frac{\tilde{\mathbf{v}}_e - \tilde{\mathbf{v}}_i}{\tau_{ei}},$$

или между ионами и электронами

$$f_{ie} = n_{0e}m_e \frac{\tilde{\mathbf{v}}_e - \tilde{\mathbf{v}}_i}{\tau_{ei}},$$

отличаются по знаку – так и должно быть для сохранения импульса в целом в ион-электронной системе, но, на первый взгляд, несимметричны при «буквенной» перестановке масс, зарядов и концентраций частиц. В действительности, необходимая симметрия имеет место. Достаточно вспомнить, что, как это было показано в § 9, эти параметры должны входить в выражение для времени между столкновениями ионов и электронов следующим образом:

$$\tau_{ei} \sim \frac{m_e/\mu_{ei}}{e_e^2 e_i^2 n_{0i}}, \quad \mu_{ei} = \frac{m_e M_i}{m_e + M_i}.$$

Теперь, после подстановки в выражения для плотностей сил трения, требуемая симметрия становится очевидной.

В уравнениях (4.24), (4.26) мы пренебрегли эффектами, связанными с конечностью температуры плазмы, что справедливо

в высокочастотной области, когда выполнено условие (4.20). Чтобы продвинуться в область меньших частот, когда фазовая скорость волны оказывается одного порядка с тепловыми скоростями частиц, необходимо усложнить модель плазмы, включая эффекты конечного давления, что мы и собираемся теперь сделать. Вместе с тем для упрощения будем пренебрегать столкновениями ионов и электронов. Это возможно, если температура достаточно велика. Напомним, что частота ион-электронных столкновений быстро убывает с ростом температуры:

$$v_{ei} \sim T_e^{-3/2}.$$

Если температура плазмы конечная, то в правые части уравнений движения (4.24) необходимо добавить слагаемые с градиентом давления. Пусть температура компонент плазмы постоянная, тогда градиент давления определяется градиентом возмущения плотности:

$$\nabla \tilde{p}_{e,i} = T_{e,i} \nabla \tilde{n}_{e,i},$$

следовательно, уравнения движения необходимо дополнить уравнениями, определяющими возмущение плотности плазмы. Если число частиц плазмы сохраняется, то необходимые нам дополнительные соотношения дают уравнения непрерывности. Для малых возмущений на фоне однородной плазмы это уравнения вида:

$$\frac{\partial \tilde{n}_{e,i}}{\partial t} = -\operatorname{div}(n_{0e,i} \tilde{\mathbf{v}}_{e,i}).$$

Кроме модели плазмы с постоянной температурой, часто используется модель *политропы*, в которой давление и температура плазмы предполагаются степенными функциями плотности:

$$p_{e,i} = n_{e,i} T_{e,i} \sim n_{e,i}^{\gamma_{e,i}},$$

где  $\gamma_{e,i} = \text{const}$  соответствующий показатель политропы. Для этого случая градиент давления для малых возмущений будет равен

$$\nabla \tilde{p}_{e,i} = \gamma_{e,i} T_{e,i} \nabla \tilde{n}_{e,i}.$$

Объединяя вместе все выше сказанное, приходим к следующей модели для «теплой плазмы»:

$$\begin{aligned} m_\alpha n_{0\alpha} \frac{\partial \tilde{N}_\alpha}{\partial t} &= e_\alpha n_{0\alpha} \tilde{E} - \gamma_\alpha T_{0\alpha} \nabla \tilde{n}_\alpha, \\ \frac{\partial \tilde{N}_\alpha}{\partial t} &= -\operatorname{div}(n_{0\alpha} \tilde{v}_\alpha). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Здесь индекс  $\alpha = e, i$  обозначает «сорт» частиц плазмы – ион или электрон. Так, например,  $e_e = -|e|$  – заряд электрона, а  $e_i = Z|e|$  – заряд иона. Вновь предполагая волны гармоническими, вычисляем возмущение плотности и скорости компонент плазмы:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_\alpha &= n_{0\alpha} \frac{\vec{k} \tilde{v}_\alpha}{\omega} = \frac{ie_\alpha}{m_\alpha} \frac{\vec{k} \tilde{E}}{\omega^2 - k^2 c_{s\alpha}^2}, \\ \tilde{v}_\alpha &= \frac{ie_\alpha}{\omega m_\alpha} \frac{\omega^2 \tilde{E} - k^2 c_{s\alpha}^2 (\tilde{E} - \frac{\vec{k}}{k} (\frac{\vec{k}}{k} \tilde{E}))}{\omega^2 - k^2 c_{s\alpha}^2}; \quad c_{s\alpha}^2 \equiv \gamma_\alpha \frac{T_{0\alpha}}{m_\alpha}, \end{aligned}$$

где, по аналогии с газом, для краткости введено обозначение  $c_{s\alpha}$  для «скорости звука» соответствующей компоненты плазмы. Умножив найденные скорости компонент плазмы на заряд и невозмущенную плотность, просуммировав затем результат по сортам частиц, вычисляем плотность электрического тока:

$$\vec{j} = \sum_{\alpha=e,i} e_\alpha n_{0\alpha} \tilde{v}_\alpha = \frac{i}{\omega} \sum_{\alpha=e,i} \frac{n_{0\alpha} e_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{\omega^2 \tilde{E} - k^2 c_{s\alpha}^2 (\tilde{E} - \frac{\vec{k}}{k} (\frac{\vec{k}}{k} \tilde{E}))}{\omega^2 - k^2 c_{s\alpha}^2}.$$

Воспользовавшись, далее, определениями (4.9), (4.10) получаем тензор проводимости:

$$\hat{\sigma}_{p,q}(\vec{k}, \omega) = \frac{i}{\omega} \sum_{\alpha=e,i} \frac{n_{0\alpha} e_\alpha^2}{m_\alpha} (\delta_{p,q} - \frac{k_p k_q}{k^2} + \frac{\omega^2}{\omega^2 - k^2 c_{s\alpha}^2} \frac{k_p k_q}{k^2}), \quad (4.30)$$

а затем и тензор диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p,q}(\vec{k}, \omega) &\equiv \delta_{p,q} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{p,q}(\vec{k}, \omega) = \\ &= \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \left(\delta_{p,q} - \frac{k_p k_q}{k^2}\right) + \left(1 - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - k^2 c_{s\alpha}^2}\right) \frac{k_p k_q}{k^2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

В формулах (4.30), (4.31) индексы  $p, q$  нумеруют компоненты тензоров. Поскольку обсуждаемая нами сейчас модель плазмы в отсутствие волны является изотропной – нет никакого выделенного направления, то структура тензора диэлектрической проницаемости совпадает с предсказываемой формулой (4.14). Из сопоставления с этой формулой получаем продольную

$$\varepsilon_l = 1 - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - k^2 c_{s\alpha}^2} \quad (4.32)$$

и поперечную

$$\varepsilon_{tr} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (4.33)$$

диэлектрическую проницаемость. Они разные, поскольку учет теплового движения частиц плазмы приводит к появлению явной зависимости диэлектрической проницаемости от волнового числа. Сравнив (4.32), (4.33) с формулой (4.19) для холодной плазмы, мы видим, что изменение претерпевает только продольная диэлектрическая проницаемость, поперечная остается неизменной! Это связано с тем, что поперечная гармоническая волна малой амплитуды не изменяет плотности плазмы, следовательно, не появляется градиент давления, и конечность температуры несущественна.

В статическом пределе, то есть в пределе  $\omega \rightarrow 0$ , продольная проницаемость оказывается равной

$$\begin{aligned} \varepsilon_l(\omega \rightarrow 0) &= 1 + \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 c_{s\alpha}^2} \equiv 1 + \sum_{\alpha=e,i} \frac{4\pi n_{0\alpha} e_\alpha^2}{k^2 \gamma_\alpha T_\alpha} \equiv \\ &\equiv 1 + \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{\gamma_e r_{De}^2} + \frac{1}{\gamma_i r_{Di}^2} \right), \end{aligned} \quad (4.34)$$

что совпадает с (4.22), если принять  $\gamma_e = \gamma_i = 1$ , то есть считать компоненты плазмы изотермическими.

Подчеркнем, что, строго говоря, учет теплового движения частиц плазмы требует кинетического описания. Поэтому приведенные результаты дают качественно правильную, но упрощенную картину диэлектрических свойств плазмы. Можно добиться лучшего согласия с точными результатами, если входящие в приведенные формулы показатели  $\gamma_e, \gamma_i$  рассматривать в качестве «подгоночных параметров», отбирая их в зависимости от конкретной решаемой задачи. Например, в случае, когда тепловые поправки можно считать малыми, но конечными, из формулы (4.32) приближенно получаем:

$$\varepsilon_l \approx 1 - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\gamma_\alpha T_\alpha}{m_\alpha} \right), \quad (4.35)$$

что совпадает с результатом кинетической теории [18] при выборе  $\gamma_\alpha = 3$ .

## § 29. Поперечные электромагнитные волны в немагнитной плазме

Вооружившись полученными в предыдущем параграфе результатами, рассмотрим процесс распространения электромагнитных волн в плазме. Как мы уже знаем (см. § 27) задача сводится к решению дисперсионных уравнений

$$\varepsilon_l = 0,$$

или

$$\varepsilon_{tr} = N^2$$

в зависимости от того, какой конкретно тип волны нас интересует: чисто продольные или чисто поперечные волны. Последний случай особенно прост. С него и начнем обсуждение плазменных волн.

Поскольку для поперечных волн диэлектрическую проницаемость плазмы определяет соотношение (4.33), то дисперсионное уравнение будет таким:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = N^2 \equiv \frac{k^2 c^2}{\omega^2}.$$

Решением этого уравнения, очевидно, является

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}. \quad (4.36)$$

Это соотношение и определяет закон дисперсии поперечной волны в плазме (рис. 4.1). Обратим внимание, что для коротких волн, когда  $k \rightarrow \infty$ , получаем  $\omega \rightarrow kc$ , так что в этом пределе волна (4.36) становится обычной световой волной. Для длинных волн, когда  $k \rightarrow 0$ , приближенно

$$\omega \approx \omega_p \left( 1 + \frac{c^2 k^2}{2\omega_p^2} \right).$$

Заметим также, что для фазовой скорости волны закон дисперсии (4.36) дает значение

$$v_\phi = c \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{k^2 c^2}} > c,$$

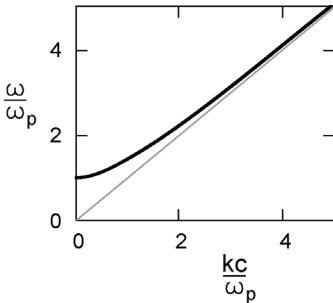


Рис. 4.1. Закон дисперсии поперечной волны в плазме. Пунктир -  $\omega = kc$

больше скорости света. Поэтому для таких волн несущественны резонансные эффекты. Просто потому, что их фазовая скорость заведомо превышает скорости частиц плазмы, всегда меньших скорости света. Подчеркнем, что групповая скорость поперечной волны, отвечающая за перенос волновой энергии,

$$v_{gp} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{k^2 c^2}}} < c,$$

оказывается, как это и должно быть, меньше скорости света в вакууме.

### § 30. Явление отсечки низкочастотной поперечной волны

Как мы видим из формулы (4.36), частота поперечной волны в плазме всегда больше плазменной частоты, поэтому поперечные волны, частота которых меньше плазменной частоты, не могут в ней распространяться. Это означает, что падающая из вакуума на границу плазмы поперечная волна с малой частотой должна отражаться. Имеет место, как говорят *явление отсечки* волны (в английской литературе - cut off). Критическая частота – частота отсечки,

$$\omega_{hp} = \omega_p \equiv \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \left(1 + \frac{Zm_e}{M_i}\right)}, \quad (4.37)$$

зависит от концентрации плазмы. Так что, измеряя критическую частоту, можно определить концентрацию плазмы. Это один из распространенных методов диагностики плазмы.

Электромагнитное поле низкочастотной волны частично все же проникает в плазму, но его амплитуда экспоненциально уменьшается вглубь плазмы. Глубина проникновения в плазму поля поперечной волны с низкой частотой определяется толщиной *вакуумного скин-слоя*, которая обратно пропорциональна плазменной частоте:

$$\delta_{\text{вак}} = \frac{c}{\omega_p}. \quad (4.38)$$

Таким образом, глубина проникновения волны в плазму определяется инерцией ее частиц, главным образом - электронов. В пренебрежении инерцией глубина проникновения поля была бы нулевой.

Проиллюстрируем сказанное простым примером. Пусть из вакуума на плоскую границу плазмы падает низкочастотная волна, слева направо, как это показано на рис. 4.2. Слева и справа от границы раздела законы дисперсии волны разные:

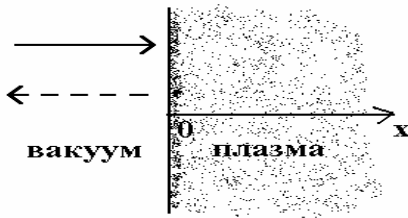


Рис. 4.2. Отсечка низкочастотной поперечной волны на границе плазмы

$$\omega^2 - k^2 c^2 = \begin{cases} \omega_p^2, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Эти соотношения можно записать в дифференциальном виде. Пусть частота волны фиксирована, заменив

$$k \rightarrow -i \partial_x,$$

получим уравнения

$$\partial_x^2 f = \begin{cases} \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} f, & x > 0, \\ -\frac{\omega^2}{c^2} f, & x < 0, \end{cases} \quad (4.39)$$

где функция  $f$  задает поле волны: например, это может быть компонента напряженности электрического поля. На границе раздела потребуем выполнения условий непрерывности:

$$\begin{aligned} \partial_x f|_{x=+0} &= \partial_x f|_{x=-0}, \\ f|_{x=+0} &= f|_{x=-0}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Нетрудно найти решение задачи (4.39), (4.40), удовлетворяющее этим условиям. Предлагаем читателю проверить, что таковым является решение, в котором в области вакуума поле складывается из поля падающей и отраженной волны, а в области плазмы волновое поле экспоненциально затухает:

$$f = f_0 \begin{cases} \exp\left(i \frac{\omega}{c} x\right) + \alpha \exp\left(-i \frac{\omega}{c} x\right), & x < 0, \\ \beta \exp(-\kappa x), & x > 0, \end{cases} \quad (4.41)$$

где обозначено

$$\kappa = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} > 0$$



- коэффициент пространственного затухания поля волны в плазме,  $f_0$  – амплитуда падающей на границу раздела волны. Амплитудные коэффициенты  $\alpha$  для отраженной волны и  $\beta$  для поля в плазме, как это вытекает из условий непрерывной сшивки (4.40), оказываются равными:

$$\alpha = \frac{\omega - i\kappa c}{\omega + i\kappa c}, \quad \beta = \frac{2\omega}{\omega + i\kappa c}.$$

Обратим внимание, что числитель и знаменатель первой формулы являются комплексно-сопряженными. Поэтому получаем

$$|\alpha| = 1,$$

и, следовательно, амплитуды падающей волны и отраженной совпадают. Это и означает наличие полного отражения падающей на плазму волны.

В пределе совсем низких частот, когда  $\omega \rightarrow 0$ , получаем приближенно

$$\alpha \approx -1 - 2i \frac{\omega}{\omega_p} \rightarrow -1, \quad \beta \approx -2i \frac{\omega}{\omega_p} \rightarrow 0, \quad \kappa \approx \delta_{\text{вак}}^{-1},$$

и длина затухания поля в плазме совпадает с длиной вакуумного скин-слоя.

### § 31. Ленгмюровские колебания и волны в плазме. Плазмоны

Рассмотрим теперь закон дисперсии высокочастотных продольных плазменных волн с частотой в области ленгмюровской частоты. Они известны как *ленгмюровские волны* и представляют собой важнейший тип возмущений, способных существовать и распространяться в плазме.

Закон дисперсии продольных волн определяет, как было показано выше, уравнение

$$\varepsilon_l = 0,$$

в которое следует подставить продольную компоненту диэлектрической проницаемости. Если плазму считать холодной, то диэлектрическую проницаемость следует определять по формуле (4.19), и мы приходим к уравнению

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.$$

Оно имеет два решения, отличающиеся знаком. Положительный корень равен

$$\omega = \omega_p \quad (4.42)$$

Как мы видим, в рассматриваемом случае частота волны совпадает с ленгмюровской частотой и не зависит от величины волнового числа. Фазовая скорость таких волн

$$v_\phi \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_p}{k} \quad (4.43)$$

уменьшается с увеличением волнового числа, а групповая скорость оказывается равной нулю:

$$\bar{v}_{gp} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \omega_p}{\partial k} \equiv 0. \quad (4.44)$$

Таким образом, в холодной плазме ленгмюровские волны не могут переносить энергию: фактически это обычные колебания плотности заряда, возникающие вследствие нарушения квазинейтральности плазмы. Если же мы учтем теперь тепловое движение частиц плазмы, то ситуация изменится кардинально. Диэлектрическую проницаемость определяет теперь формула (4.32) и дисперсионное уравнение для продольных волн становится таким:

$$\varepsilon_l = 1 - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - k^2 c_{s\alpha}^2} = 0,$$

или

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 c_{se}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - k^2 c_{si}^2} = 0, \quad c_{se,i}^2 = \gamma_{e,i} \frac{T_{e,i}}{m_{e,i}}. \quad (4.45)$$

Это уравнение несложно решить в общем виде. Но в интересующей нас сейчас высокочастотной области следует учесть, что ионы плазмы можно считать неподвижными, а потому их вклад в диэлектрическую проницаемость будет пренебрежимо малым.

Формально это отвечает пределу  $m_i \rightarrow \infty$ , и уравнение (4.45) упрощается:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 c_{se}^2} = 0, \quad c_{se}^2 = \gamma_e \frac{T_e}{m_e}.$$

Теперь его уже не сложно решить, и мы, вновь выбирая положительный корень, получаем:

$$\omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 c_{se}^2}. \quad (4.46)$$

Это соотношение и определяет закон дисперсии ленгмюровской волны в плазме с конечной температурой.

Любопытно отметить, что это соотношение по виду оказывается вполне аналогичным известной формуле, определяющей связь энергии и импульса релятивистской частицы:

$$\varepsilon = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2 c^2}.$$

По этой причине о законе дисперсии (4.46) говорят как о «частице-подобном», а ленгмюровские волны в этом плане являются «квазичастицами», которые принято называть *плазмонами*.

Полезно отметить также, что закон дисперсии (4.46) можно записать в виде:

$$\omega = \omega_{pe} \sqrt{1 + \gamma_e k^2 r_{De}^2}. \quad (4.47)$$

Второе слагаемое под корнем будет больше или порядка единицы, когда длина волны будет меньше дебаевского радиуса. В этом случае ленгмюровская волна сильно поглощается за счет механизма бесстолкновительного поглощения Ландау, так как оказывается резонансной по отношению к электронам плазмы,

$$v_\phi \sim v_{Te}.$$

По этой причине ленгмюровские волны могут существовать в плазме без существенного поглощения лишь в обратном пределе, когда их длина волны меньше дебаевского радиуса. В этом случае в (4.47) второе слагаемое под корнем можно считать малым и разложить по этой малости:

$$\omega \approx \omega_{pe} \left( 1 + \frac{\gamma_e}{2} k^2 r_{De}^2 \right), \quad k^2 r_{De}^2 \ll 1.$$

Аналогия с энергией частицы опять остается в силе, но теперь в нерелятивистском пределе, когда энергия связана с импульсом следующим образом:

$$\varepsilon \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}.$$

В области частот ленгмюровских волн гидродинамическое описание, следствием которого фактически является закон (4.47), будет адекватным при выборе  $\gamma_e = 3$ . Подставив это значение в (4.47), получим окончательно

$$\omega \approx \omega_{pe} \left( 1 + \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \right), \quad k^2 r_{De}^2 \ll 1. \quad (4.48)$$

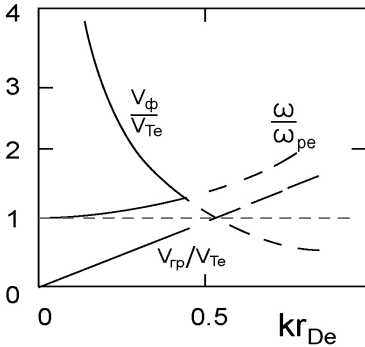


Рис.4.3. Закон дисперсии ленгмюровской волны

фазовая же скорость приближенно определяется формулой

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \approx \frac{\omega_{pe}}{k} = \frac{v_{Te}}{\sqrt{3}kr_{De}}. \quad (4.50)$$

При учете теплового движения частиц ленгмюровские волны получают возможность распространяться в плазме, перенося энергию.

Именно об этом соотношении и говорят обычно как о законе дисперсии ленгмюровских волн

в плазме. Строго говоря, он справедлив, как мы видели, лишь при выполнении сильного неравенства  $k^2 r_{De}^2 \ll 1$ . Однако качественно закон дисперсии (4.48) остается в силе и при выполнении более

мягкого условия, когда длина волны составляет несколько дебаевских радиусов.

Второе слагаемое в скобках в формуле (4.48) принято называть тепловой поправкой. Учет этой поправки приводит к тому, что групповая скорость ленгмюровской волны, в отличие от случая холодной плазмы, становится ненулевой (см. рис.4.3):

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = 3\omega_{pe} \bar{k} r_{De}^2 = \sqrt{3} v_{Te} k r_{De}, \quad (4.49)$$

### § 32. Ионные ленгмюровские волны. Ионно-звуковые волны в плазме

Вернемся вновь к дисперсионному уравнению (4.45). Для рассмотренных выше ленгмюровских волн групповая и фазовая скорости удовлетворяют неравенству

$$v_{gp} < v_{Te} < v_{\phi}.$$

Теперь рассмотрим возможность распространения в плазме волн, фазовая скорость которых значительно меньше тепловой скорости электронов:

$$v_{\phi} \ll v_{Te}.$$

Если это условие выполнено, то в уравнении (4.45) в знаменателе второго слагаемого можно опустить  $\omega^2$  и тогда это уравнение приводится к виду

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 c_{se}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - k^2 c_{si}^2} = 0, \quad c_{se,i}^2 = \gamma_{e,i} \frac{T_{e,i}}{m_{e,i}}.$$

Теперь уже не сложно найти интересующее нас решение:

$$\omega^2 = k^2 c_{si}^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 c_{se}^2}}.$$

Учтем теперь, что по определению соответствующих величин имеет место соотношение:

$$\frac{c_{se}^2}{\omega_{pe}^2} \equiv \frac{\gamma_e T_e / m_e}{4\pi e^2 n_{ei} / m_e} \equiv \gamma_e r_{De}^2.$$

Тогда полученный нами результат можно записать в виде

$$\omega^2 = k^2 c_{si}^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{I}{\gamma_e k^2 r_{De}^2}}. \quad (4.51)$$

Для коротких волн, когда длина волны меньше электронного дебаевского радиуса, знаменатель во втором слагаемом примерно равен единице, и мы получаем:

$$\omega^2 \cong k^2 c_{si}^2 + \omega_{pi}^2 \equiv \omega_{pi}^2 \left( 1 + \frac{\gamma_i T_i}{Z T_e} k^2 r_{De}^2 \right), \quad k^2 r_{De}^2 \ll 1. \quad (4.52)$$

Частота этих волн оказывается порядка ионной ленгмюровской частоты. По аналогии с (4.46), эти волны называют *ионными ленгмюровскими волнами*. Как правило, если температура ионов не мала, они сильно затухают в плазме, так как оказываются резонансными по отношению к ионам.

В обратном пределе длинных волн, длина волны которых превышает электронный дебаевский радиус, в знаменателе второго слагаемого в формуле (4.51) главным, напротив, является второй член, и мы получаем:

$$\omega^2 \cong k^2 c_{si}^2 + \gamma_e k^2 r_{De}^2 \omega_{pi}^2 \equiv k^2 c_s^2, \quad k^2 r_{De}^2 \ll 1. \quad (4.53)$$

где обозначено

$$c_s^2 \equiv c_{si}^2 + \gamma_e r_{De}^2 \omega_{pi}^2 = \frac{Z \gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_i}. \quad (4.54)$$

Сравнив (4.54) с точным результатом кинетической теории [18], заключаем, что в рассматриваемом диапазоне частот кинетика и гидродинамика, использованная нами, дают совпадающие результаты при выборе  $\gamma_e = 1$ ,  $\gamma_i = 3$ , так что (4.54) следует записывать в виде:

$$c_s^2 = \frac{Z T_e + 3 T_i}{M_i}. \quad (4.55)$$

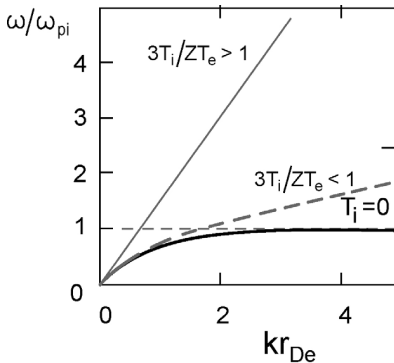


Рис. 4.4. Ионно-звуковые волны в плазме

Вытекающий из соотношения (4.53) закон дисперсии

$$\omega = kc_s, \quad (4.56)$$

согласно которому частота волны оказывается прямо пропорциональной волно-вому числу, типичен для звуковых волн (напомним, что мы обсуждаем сейчас продольные волны!)

Например, закон дисперсии звука в обычном газе

$$\omega = kc_s, \quad c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{\gamma T}{M}},$$

где  $T$  – температура, а  $M$  – масса молекул газа. По этой причине волны с законом дисперсии (4.55), (4.56) принято называть *ионно-звуковыми волнами*. Наряду с ленгмюровскими волнами, это важнейший тип способных распространяться в плазме волн (см. рис.4.4).

Очевидно, фазовая и групповая скорости ионно-звуковой волны совпадают:

$$v_{\text{TM}} = v_{\text{гп}} = c_s = \sqrt{\frac{ZT_e + 3T_i}{M_i}}. \quad (4.57)$$

Величина этих скоростей существенно зависит от соотношения температур компонент плазмы. При этом если

$$T_i \geq T_e,$$

то фазовая скорость ионно-звуковой волны будет по величине порядка тепловой скорости ионов. Такие волны должны сильно поглощаться в плазме, так как они становятся резонансными по отношению к ионам. Поэтому ионно-звуковая волна может существовать только в сильно неизотермической плазме, когда электронная компонента сильно «перегрета» по отношению к

ионной. В этом случае вклад температуры ионов в формуле (4.57) является малым, и поэтому скорость ионно-звуковой волны главным образом определяется температурой электронов:

$$c_s \cong \sqrt{\frac{ZT_e}{M_i}}, \quad T_e \gg T_i. \quad (4.58)$$

В этом случае, поскольку в формулу для скорости звука в качестве меры тепловой энергии входит электронная температура, а в качестве инерционного фактора входит масса ионов, принято эти волны называть «ионным звуком с электронной температурой». Собирая вместе все указанные выше неравенства, получим область фазовых скоростей, в которой возможно существование ионно-звуковых волн:

$$v_{Ti} = \sqrt{\frac{3T_i}{M_i}} \ll v_{\text{TM}} \sim c_s \cong \sqrt{\frac{ZT_e}{M_i}} \ll v_{Te} = \sqrt{\frac{3T_e}{m_e}}. \quad (4.59)$$

Взяв теперь эти неравенства в качестве отправной точки, можно существенно упростить вывод закона дисперсии для ионного звука. Действительно, поскольку фазовая скорость волны предполагается малой по сравнению с тепловой скоростью электронов, инерция последних становится несущественной, по этой причине электронная подсистема может считаться квазиравновесной, а, следовательно, действующие в этой подсистеме силы – сила со стороны поля волны и сила, обусловленная градиентом электронного давления, – должны быть уравновешены. Поскольку продольная волна всегда является потенциальной, введем потенциал поля волны согласно

$$\vec{E} = -\nabla\varphi.$$

Тогда баланс указанных сил, предполагая электронную температуру постоянной, можно записать так:

$$|e| n_e \nabla\varphi - T_e \nabla n_e = 0, \quad (4.60)$$

и, как мы видим, концентрация электронов определяется распределением потенциала поля волны. Можно сказать и так: «безынерционные» электроны мгновенно подстраиваются под профиль поля, создаваемый волной, скапливаясь в тех областях, где потенциал поля больше:

$$n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{|e|\varphi}{T_e}\right).$$

Здесь  $n_{e0}$  - невозмущенная полем волны концентрация электронов (в области нулевого потенциала). Полученный результат, как мы видим, совпадает с



известной формулой Больцмана для равновесного распределения частиц, в нашем случае электронов, во внешнем поле.

Для ионной подсистемы плазмы ситуация противоположная. Поскольку фазовая скорость волны значительно превышает тепловую скорость ионов, можно пренебречь конечностью ионной температуры, считая ионы холодными, но принципиально учесть инерцию ионов, ограничивающую частоту колебаний. Для холодных  $Z$ -кратно ионизованных ионов уравнение движения выглядит так:

$$M_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = -Z |e| \nabla \varphi. \quad (4.61)$$

Под действием поля волны ионы плазмы приходят в движение, и их концентрация начинает изменяться, так как согласно уравнению непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \bar{v}_i) = 0. \quad (4.62)$$

В качестве дополнительного условия, замыкающего систему (4.60) – (4.61), воспользуемся требованием квазинейтральности плазмы

$$n_e = Zn_i, \quad (4.63)$$

которое, очевидно, должно выполняться, так как длина волны предполагается значительно превышающей электронный дебаевский радиус. В противоположном случае, когда волны короткие, условие (4.63) следует заменить уравнением Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi |e| (n_e - Zn_i).$$

Нелинейные уравнения (4.60) – (4.63) справедливы, в рамках высказанных выше предположений, для ионно-звуковых волн любой амплитуды. Ограничимся волнами малой амплитуды. Полагаем

$$\varphi = \tilde{\varphi}, \quad n_{e,i} = n_{e,i0} + \tilde{n}_{e,i}, \quad \bar{v}_i = \tilde{v}_i,$$

где знаком тильда помечены малые возмущения. Подставим это представление в уравнения (4.60) – (4.63), разложим затем по амплитуде и, опустив нелинейные слагаемые, в результате получим

$$|e| n_{e0} \nabla \tilde{\varphi} - T_e \nabla \tilde{n}_e = 0,$$

$$M_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} = -Z |e| \nabla \tilde{\varphi}, \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{i0} \tilde{v}_i) = 0,$$

$$\tilde{n}_e = Z \tilde{n}_i, \quad n_{e0} = Zn_{i0}.$$

Выразив теперь все величины через одну из них, например, через потенциал поля волны, получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\varphi} - c_s^2 \Delta \tilde{\varphi} = 0, c_s^2 = \frac{ZT_e}{M_i}, \quad (4.65)$$

следствием которого, как нетрудно проверить, является закон дисперсии (4.56), причем величина входящей в него скорости звука определяется формулой (4.58).

Мы рассмотрели самые простые дисперсионные уравнения для немагнитной плазмы. Для удобства читателей, наиболее важные из них сведены в табл. 4.1.

### § 33. Бесстолкновительное затухание волн в плазме

Выше при обсуждении конкретных типов волн, способных распространяться в плазме, мы неоднократно ссылались на резонансные эффекты, имеющие место, когда скорости частиц плазмы совпадают с фазовой скоростью волны. Здесь, не вдаваясь в подробности достаточно сложных математических выкладок (см. [20]), обсудим кратко физическую сторону механизма *бесстолкновительного затухания волн* в плазме, впервые предсказанного Ландау. Когда говорят о резонансном взаимодействии волн и частиц плазмы, то, по сути дела, речь идет о черенковском резонансе

$$\omega - \vec{k}\vec{v} = 0. \quad (4.66)$$

Фазовая скорость поперечной волны в изотропной плазме, как мы видели раньше, превышает скорость света. Следовательно, это условие заведомо не может выполняться и резонансные эффекты такого рода, как можно ожидать, будут несущественны. Имеет смысл поэтому рассмотреть резонансное взаимодействие частиц плазмы с продольными волнами, фазовая скорость которых существенно меньше скорости света, так что выполнение условия резонанса возможно. Пусть для простоты продольная волна будет одномерной (плоской). Обычно механизм бесстолкновительного поглощения энергии волн частицами плазмы поясняют с помощью следующей наглядной картинки, изображенной на рис. 4.5, идею которой мы заимствовали из книги [21].

Таблица 4.1

Тип волны	Закон дисперсии	Фазовая скорость	Групповая скорость	Примечание
Электронная ленгмюровская волна в холодной плазме	$\omega_{Le}$	$\omega_{Le}/k$	0	$kr_{De} \rightarrow 0$
Электронная ленгмюровская волна в «теплой» плазме	$\omega_{Le} \left( 1 + \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \right)$	$\approx \omega_{Le}/k$	$v_{Te} (kv_{Te}/\omega_{Le})$	$kr_{De} \ll 1$
Ионно-звуковая волна	$kc_s$	$c_s$	$c_s$	$c_s \approx \sqrt{\frac{ZT_e}{m_i}}$ , $T_e \gg T_i$ $kr_{De} \ll 1$
Поперечная плазменная волна	$\sqrt{\omega_{Le}^2 + k^2 c^2}$	$c\sqrt{1 + \omega_{Le}^2/k^2 c^2}$	$c/\sqrt{1 + \omega_{Le}^2/k^2 c^2}$	

В движущейся системе координат, относительно которой волна покоится, наглядно можно ее представлять как последовательность горбов и ям потенциала. Частицы, скатывающиеся в ямы, ускоряются, а частицы, закатывающиеся на горбы, напротив, замедляются полем волны. Выделим, как показано на рис. 3.5, две

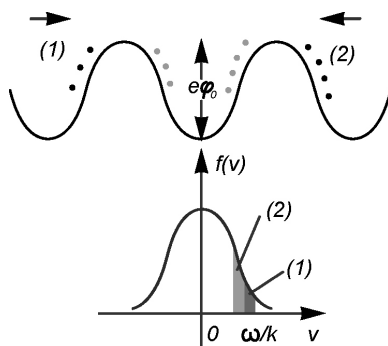


Рис. 4.5. К механизму резонансного поглощения волн в плазме. Вверху: «горбы и впадины» потенциала поля волны в системе ее покоя; стрелками показаны направления скоростей опережающих (1) и отстающих (2) групп частиц. Внизу: функция распределения частиц по скоростям в неподвижной системе координат. Выбранная волна бежит слева направо

группы частиц, отвечающих одному и тому же интервалу  $\Delta v$  справа (группа (1)) и слева (группа (2)) от скорости, совпадающей по величине и направлению с фазовой скоростью волны. В движущейся с фазовой скоростью системе координат первые, очевидно, обгоняют волну, а вторые отстают от нее (для наглядности изображено разное количество кружочков). Если в качестве таких групп частиц взять те, которые на рисунке условно изображены черными точками, то обе группы частиц тормозятся, так как их скорости в данный момент времени направлены к «горбам» потенциала, на которые поэтому они вынуждены забираться. Однако движущиеся направо при этом как бы «подталкивают» горб вперед, а движущиеся налево, напротив, «толкают» его назад. Если же в качестве таких групп частиц взять те, которые условно изображены светлыми точками, то поскольку при том же самом направлении скорости частицы обеих групп

теперь скатываются с «потенциальных горок», обе они должны ускоряться. Но эффект взаимодействия с волной, очевидно, не должен зависеть от того, как мы выберем расположение по координате этих групп частиц! Очевидно, эти наглядные представления не дают полной картины.

Детально механизм бесстолкновительного взаимодействия разобран в [19]. В обмене энергией с полем участвуют частицы со скоростями, близкими к фазовой скорости волны. Причем частицы, движущиеся со скоростью меньшей, чем фазовая скорость, получают энергию от волны, а те частицы, фазовая скорость которых больше фазовой скорости, отдают энергию волне. Если первых несколько больше, чем вторых, т.е. производная функции распределения по скорости отрицательная, то волна будет терять энергию. Именно такова ситуация для равновесной максвелловской функции распределения, поэтому в плазме с такой функцией распределения все волны должны затухать.

### **§ 34. Диэлектрические свойства магнитоактивной плазмы**

Помещение плазмы в магнитное поле существенно меняет ее свойства: плазма становится анизотропной. Поэтому волны в плазме при наличии внешнего магнитного поля проявляют значительное разнообразие: скорость их распространения и характер дисперсии существенно зависят от направления распространения волны по отношению к направлению магнитного поля, от взаимной ориентации плоскости колебаний вектора электрического поля волны и «основного» магнитного поля, в которое помещена плазма. Помещенную в магнитное поле плазму иногда называют *магнитоактивной*. Строгое рассмотрение в магнитоактивной плазме возникновения и распространения колебаний и волн различного типа в произвольном направлении в меняющемся магнитном поле представляет очень большие трудности. Мы рассмотрим здесь, естественно, лишь наиболее простые случаи. Будем считать, что внешнее магнитное поле, в которое помещена плазма, постоянно и во времени и в пространстве. Что оно достаточно велико, так что плазма замагничена (напомним, что плазма называется замагниченной, если характерное время межчастичных столкновений значительно

превышает периоды вращения частиц плазмы по ларморовским орбитам). В то же время плазму будем считать холодной, пренебрегая тем самым тепловым движением частиц. Такой подход позволяет охватить не все, конечно, но наиболее важные типы волн малой амплитуды в магнитоактивной плазме.

Отметим несколько полезных формальных моментов.

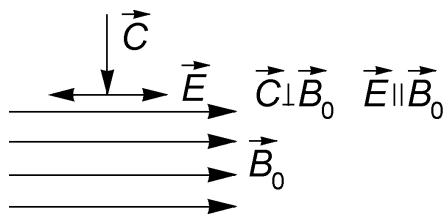
- **Продольные (вдоль магнитного поля) диэлектрические свойства плазмы.**

При распространении в плазме продольной волны вдоль внешнего магнитного поля, очевидно, диэлектрические свойства плазмы такие же, как и в случае, когда этого магнитного поля нет. Колебания частиц плазмы под действием электрического поля волны происходят вдоль магнитных силовых линий внешнего магнитного поля, а в этом случае наличие магнитного поля на эти колебания никак не сказывается. Поэтому очевидно, что (для холодной плазмы) компонента тензора диэлектрической проницаемости вдоль магнитного поля будет такая же, как и в случае без магнитного поля:

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_0 = 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2, \quad \omega_0^2 = \sum_{\alpha=e,i} \frac{4\pi n_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \equiv \sum_{\alpha=e,i} \omega_{L\alpha}^2,$$

где  $\omega_{L\alpha}$  — ленгмюровские частоты частиц плазмы.

Пусть теперь на вмороженную в магнитное поле плазму падает



поперечная электромагнитная волна, так, что вектор скорости электромагнитной волны перпендикулярен вектору напряженности магнитного поля, а вектор напряженности электрического поля этой волны  $E$

Рис.4.6. Электромагнитная волна распространяется перпендикулярно к  $B_0$  и ее вектор  $E \parallel B_0$  или антипараллелен) вектору  $B_0$  (рис.4.6). Внешнее

магнитное поле будем помечать индексом «0», чтобы отличать его от собственного магнитного поля волны. Вновь электрическое поле

волны воздействует только на движение частиц вдоль магнитного поля, на которое магнитное поле не сказывается.

Поэтому такая волна будет распространяться в замагниченной плазме так же, как она распространялась бы в плазме, свободной от магнитного поля. Это важное обстоятельство широко используется в диагностике плазмы.

• **Вмороженность магнитного поля в идеально проводящую плазму**

Как известно, закон Ома для среды следует записывать в системе координат, относительно которой она покоится. Поэтому в простейшем случае однородной плазмы, пересекающей в общем случае при движении силовые линии магнитного поля, закон Ома должен быть записан в виде:

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E}^*, \quad \vec{E}^* \equiv \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.67)$$

где  $\hat{\sigma}$  - проводимость среды. Если среда – идеальный проводник,  $\hat{\sigma} \rightarrow \infty$ , то в системе координат, в которой она покоится, электрическое поле отсутствует. Поэтому условие идеальной проводимости оказывается следующим:

$$\vec{E}^* = \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} = 0. \quad (4.68)$$

Подставив определяемую этим условием напряженность электрического поля в уравнение индукции

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \text{rot} \vec{E},$$

приходим к уравнению вмороженности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.69)$$

Это уравнение обладает следующим замечательным свойством. Выделим в плазме некоторый контур, пронизываемый силовыми линиями магнитного поля (рис. 4.7), и смещающийся вместе с плазмой.

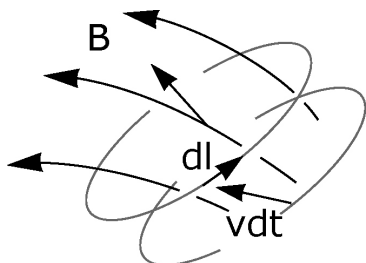


Рис. 4.7. К теореме вмороженности

Поток магнитного поля через этот контур по определению равен интегралу от вектора индукции магнитного поля по площади, охватываемой этим контуром

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS \quad (4.70)$$

где  $B_n$  – проекция вектора индукции на направление нормали. Проинтегрировав уравнение (4.69) по этому контуру, мы обнаружим, что поток магнитного поля, пронизывающего контур, сохраняется:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0. \quad (4.71)$$

Сохранение потока и составляет содержание так называемой *теоремы вмороженности*. Поскольку это утверждение справедливо для любого контура, движущегося вместе с веществом, то это означает, что силовые линии магнитного поля как бы «приклеены» к идеально проводящей среде. Поэтому смещение или деформация контура при движении плазмы приводит к соответствующему искажению картины силовых линий магнитного поля.

#### • Поперечные диэлектрические свойства плазмы

Чтобы понять, какова должна быть структура чисто поперечной компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы, рассмотрим два предельных случая. Очевидно, что когда поле волны высокочастотное, с частотой значительно превышающей циклотронные частоты вращения частиц плазмы в магнитном поле, то наличие магнитного поля несущественно. Поэтому в этом пределе должно быть

$$\varepsilon_{\perp} \Big|_{\omega \gg \omega_{Be,i}} \approx \varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_0 = 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2. \quad (4.72)$$

В обратном пределе низких частот, распространение в плазме поперечной электромагнитной волны с вектором напряженности



электрического поля, направленным строго перпендикулярно к вектору индукции внешнего магнитного поля (рис.4.8), вполне аналогично помещению плазмы в скрещенные поля – медленно меняющееся электрическое поле волны и однородное внешнее магнитное поле, в которое помещена плазма.

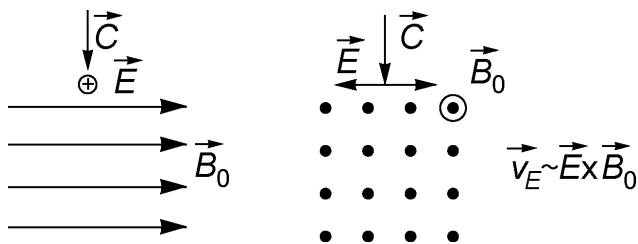


Рис.4.8. Направление электромагнитной волны перпендикулярно к  $\vec{B}_0$  и ее вектор  $\vec{E} \perp \vec{B}_0$

В этих условиях, очевидно, мы можем воспользоваться дрейфовым приближением, изложенным в § 17. Частицы плазмы должны дрейфовать в направлении, перпендикулярном к электрическому и магнитному полю, со скоростью (рис. 4.9)

$$u_e = u_i = c \frac{E}{B}.$$

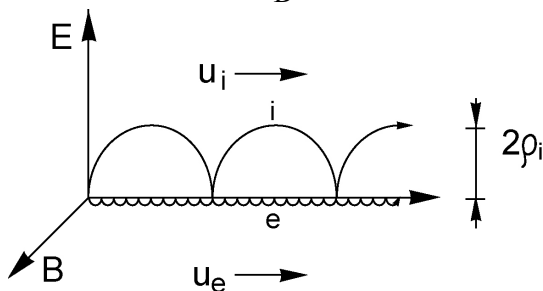


Рис. 4.9. Поляризация плазмы в поле поперечной волны

При этом, поскольку смещения от равновесных положений вдоль электрического поля положительно заряженных ионов и

отрицательно заряженных электронов имеют разный знак, то плазма должна поляризоваться, как это уже обсуждалось в § 20. Там же была рассчитана величина поляризации плазмы и соответствующая ей поперечная компонента диэлектрической проницаемости (2.103). Воспользовавшись этим результатом, получаем, что в рассматриваемом низкочастотном пределе

$$\varepsilon_{\perp} \Big|_{\omega \ll \omega_{Be,i}} = 1 + \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega_{B\alpha}^2}. \quad (4.73)$$

Поскольку масса ионов значительно превосходит по величине массу электронов, то основной вклад в диэлектрическую проницаемость дают ионы плазмы (это связано с тем, что ларморовский радиус более массивных ионов много больше ларморовского радиуса электронов). Как мы видим, в этом пределе плазма выступает в роли обычного диэлектрика. Если плотность плазмы не является чрезмерно малой, то плазма, как показано в § 20, является весьма хорошим диэлектриком с большой по величине диэлектрической постоянной, значительно большей, чем у всех известных обычных диэлектрических материалов.

Объединяя два предельных случая (4.72) и (4.73), и, учитывая возможность резонанса при совпадении частоты волны и циклотронных частот, уже нетрудно предвидеть в общем случае следующий результат:

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2}. \quad (4.74)$$

Это подтверждается детальными расчетами [18]. В заключение приведем (для справок) без вывода полную структуру тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

диагональные компоненты здесь определяются приведенными выше формулами, а «косые» компоненты определяются величиной:

$$g = - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{B\alpha} \omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)}. \quad (4.76)$$

Предполагается, что система координат выбрана так, что ее ось  $z$  параллельна вектору индукции внешнего магнитного поля.

### § 35. Волны в магнитоактивной плазме

Если в плазме без магнитного поля спектр возможных волн по существу ограничивается продольными ленгмювскими и ионно-звуковыми волнами (возможна еще так называемая «энтропийная» волна – своеобразная «ямка давления») и поперечной плазменной волной, то в магнитоактивной плазме помимо этих волн появляется множество новых. Это – поперечные альфвеновские волны, магнитозвуковые волны (или магнитный звук, кратко эти волны часто обозначают аббревиатурой МЗВ), а также их разновидности, такие как быстрая МЗВ, медленная МЗВ, «косая» МЗВ, циклотронные резонансы и циклотронные волны, включая ионно-циклотронные и электронно-циклотронные волны, нижнегибридные волны и верхнегибридные волны, геликоны (спиральные волны) или «свистящие атмосферерики» и другие.

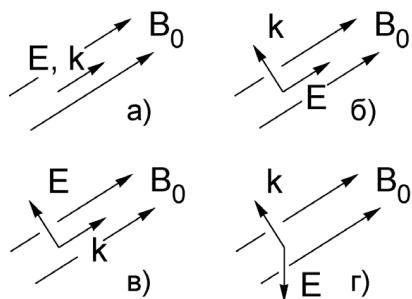


Рис. 4.10. Классификация волн в магнитоактивной плазме: а – продольная волна; б – поперечная (обыкновенная) волна; в – альфвеновская волна (поперечная); г – магнитозвуковая волна (поперечная).

Как уже отмечалось выше, закон дисперсии волны и ее характер существенно зависят от взаимной ориентации направления распространения волны, т.е. ее волнового вектора  $\vec{k}$ , вектора внешнего магнитного поля  $\vec{B}$  и вектора электрического поля волны  $\vec{E}$ .

Поэтому простейшая классификация волн в магнитоактивной плазме сводится к перебору всех возможных взаимных ориентаций этих трех векторов, некоторые из которых приведены на рис. 4.10. Рассмотрим простейшие случаи.

**Продольное распространение волны, волновой вектор параллелен внешнему магнитному полю**

- Продольные волны ( $\vec{E} \parallel \vec{k} \parallel \vec{B}_0$ , рис. 4.10,а)

Как отмечено в предыдущем параграфе, пока речь идет о волнах малой амплитуды, а плазма и магнитное поле предполагаются однородными, «замагничивание» плазмы влияния не оказывает и в плазме возможны обычные ленгмюровские и ионно-звуковые (если температура плазмы считается ненулевой) волны (см. §§ 31,32).

- Альфвеновская волна ( $\vec{E} \perp \vec{k} \parallel \vec{B}_0$ , рис. 4.10,в)

Так как волновой вектор и вектор напряженности электрического поля волны взаимно перпендикулярны, то речь идет о поперечной волне, распространяющейся вдоль внешнего поля. Дисперсионное уравнение для поперечной волны (см. § 27) в данном случае сводится к

$$\varepsilon_{\perp} = N^2, \quad N^2 \equiv \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \equiv \frac{c^2}{v_{\phi}^2}.$$

Оно особенно простое в низкочастотном пределе, когда согласно (4.73) диэлектрическая проницаемость постоянна и не зависит от частоты. Заметим, что формулу (4.73) можно переписать в виде:

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{c^2}{c_A^2}, \quad (4.77)$$

где введено удобное обозначение

$$c_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi n(m_i + m_e)}} \quad (4.78)$$

для характерной, так называемой *альфвеновской скорости* (Х. Альфвен, 1942). Она возрастает с ростом величины магнитной индукции и уменьшается с ростом плотности плазмы. Решая дисперсионное уравнение, получим закон дисперсии для этих волн

$$v_{\phi} = v_{zp} = \frac{c_A c}{\sqrt{c^2 + c_A^2}}. \quad (4.79)$$

Если плазма редкая, так что  $c_A \gg c$ , то эта волна превращается в обычную электромагнитную волну, распространяющуюся со скоростью света.

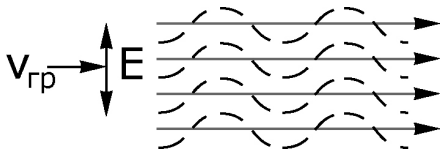


Рис. 4.11. Альфвеновская волна, - колебание «натянутых струн» – силовых линий магнитного поля.

В случае плотной плазмы, когда  $c_A \ll c$ , фазовая и групповая скорости этой волны совпадают с альфвеновской скоростью

$$v_\phi = v_{gp} = c_A. \quad (4.80)$$

Это – один из важнейших типов волновых движений магнитоактивной плазмы.

Как известно, силовые линии магнитного поля в продольном направлении стремятся сократиться, им можно приписать определенное «натяжение». Упрощенно по этой причине альфвеновскую волну можно представлять себе как колебания «натянутых струн» – силовых линий магнитного поля (рис. 4.11), при этом плазма колеблется вместе с магнитным полем, в которое она заморожена.

Отметим, что при произвольном направлении распространения закон дисперсии альфвеновской волны оказывается следующим:

$$\omega = \vec{k} \vec{c}_A, \quad \vec{c}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi n m_i}}, \quad \vec{v}_{gp} = \vec{c}_A. \quad (4.81)$$

Групповая скорость альфвеновской волны, ответственная за перенос волной энергии, параллельна вектору индукции магнитного поля. Напомним, что фазовая скорость для любой волны, в том числе и для альфвеновской, параллельна волновому вектору.

Модули групповой и фазовой скорости не зависят от величины волнового вектора. Это означает, что волна не диспергирует. Но это справедливо только в области низких частот. Вблизи циклотронных частот ситуация меняется (рис. 4.12).

Пояснить появление существенной дисперсии можно следующим образом. Известно, что любую плоско поляризованную волну можно представить в виде совокупности двух волн поляризованных по кругу – «лево- и право поляризованных». Если направление вращения оказывается резонансным по отношению к направлению вращения плазменных частиц, а мы знаем, что ионы и электроны плазмы вращаются в разных направлениях, то мы вправе ожидать появления особенности показателя преломления – аномальной дисперсии. Это и наблюдается (см. рис. 4.12).

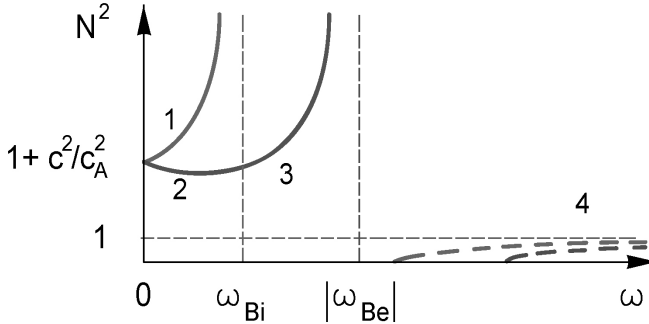


Рис. 4.12. Качественная картина дисперсии поперечных волн при продольном распространении: 1 – собственно альфвеновская волна (обыкновенная, левая поляризация), 2 – быстрая МЗВ (необыкновенная, правая поляризация), 3 – область геликонов, 4 – ВЧ-волны

***Поперечное распространение волны, волновой вектор перпендикулярен внешнему магнитному полю***

- Обыкновенные поперечные волны ( $\vec{k} \perp \vec{E} \parallel \vec{B}_0$ , рис. 4.10,б)

В этом случае магнитное поле не оказывает влияния на дисперсию волн, и закон дисперсии оказывается таким же, как в случае плазмы без магнитного поля:

$$\varepsilon_{\parallel} = N^2, \quad \omega^2 = \omega_{Le}^2 + k^2 c^2. \quad (4.82)$$

- Магнитозвуковые волны ( $\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{B}_0$ , рис. 4.10,г)

В области низких частот закон дисперсии этих волн формально такой же, как и альфвеновских:

$$v_{\phi} = v_{zp} \cong c_A, \quad (4.83)$$

но физика иная: волну можно интерпретировать как последовательность сжатий и разрежений магнитного поля и плотности плазмы (см. рис. 4.13)

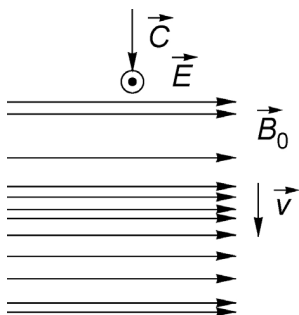


Рис. 4.13. Качественная картина распространения магнитозвуковой волны: последовательность разрежений и сжатий величины магнитного поля и плотности плазмы

Плоские волны сжатия-разряжения распространяются перпендикулярно к магнитному полю, т.е. они поперечные по отношению к магнитному полю и продольные по отношению к направлению распространения, и поперечные по отношению к ориентации электрического поля и волнового вектора. Эти волны вполне аналогичны звуковым, часто их по аналогии называют магнитным звуком, но необходимо подчеркнуть, что вещество в волне движется не в направлении  $E$ , как может

показаться, а в направлении распространения колебаний, в направлении волны, т.е. перпендикулярно к  $E$  и  $B$  (как это имеет место при дрейфовом движении в скрещенных  $E$  и  $B$  полях).

По существу это и есть дрейфовое движение, так как рассматривается движение массы, а она сосредоточена в ионах.

Если надо учитывать и давление газа при сжатии, то уравнение (4.83) изменится:

$$v^2 = \frac{B^2}{4\pi n m_i} + \gamma \frac{p}{n m_i} = \frac{B^2}{4\pi n m_i} \left( 1 + \frac{1}{2} \gamma \beta \right). \quad (4.84)$$

Если вторым членом можно пренебречь (т.е., если  $\beta \rightarrow 0$ ), то остается чисто магнитный звук; предел плазмы низкого давления,  $\beta \rightarrow 0$ , можно рассматривать как определение приближения холодной плазмы.

Отсутствие дисперсии, так же как и в случае альфвеновской волны, имеет место только при частотах, существенно меньших, чем ионная циклотронная частота. При больших частотах возникает аномальная дисперсия (рис. 4.14).

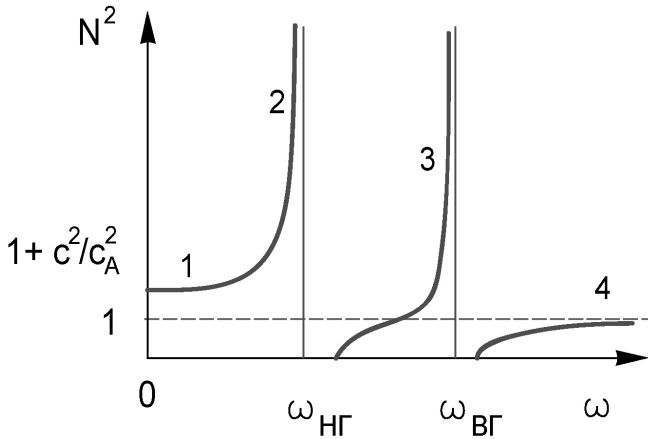


Рис. 4.14. Качественный характер дисперсии магнитозвуковых волн в области высоких частот: 1 – область магнитного звука, 2 – нижнегибридные волны, 3 – верхнегибридные волны, 4 – ВЧ-волны

Но теперь нельзя ожидать резонанса только на ионной или только на электронной циклотронной частоте: в формировании волны принимают участие одновременно оба сорта частиц плазмы. В результате частоты, отвечающие появлению аномальной дисперсии, зависят от циклотронных частот обоих сортов частиц плазмы. Это так называемая *нижнегибридная частота*, определяемая для плотной плазмы приблизительно соотношением

$$\omega_{НГ} \cong \sqrt{|\omega_{Be}\omega_{Bi}|}, \quad (4.85)$$

то есть она совпадает со средним геометрическим из циклотронных частот, а также *верхнегибридная частота*, приблизительно равная (подробнее см. [18])

$$\omega_{ВГ} \cong \sqrt{\omega_{Le}^2 + \omega_{Be}^2}. \quad (4.86)$$

В области частот  $\omega < \omega_{НГ}$  в плазме возможно распространение магнитозвуковых волн, в области частот  $\omega > \omega_{НГ}$  возможно распространение высокочастотных волн, в области частот  $\omega_{НГ} < \omega \ll \omega_{ВГ}$  чисто поперечное распространение волн невозможно.



## § 36. Неустойчивости плазмы

Плазма, с которой приходится иметь дело в лабораторных экспериментах, как правило, сильно неравновесная и обладает высокой плотностью энергии, значительно превышающей плотность энергии в окружающей среде. По законам термодинамики такой неравновесный объект, будучи предоставлен сам себе, должен стремиться к равновесию с окружающей средой, а, значит, охлаждаться. Релаксация к равновесию может происходить сравнительно спокойно: при наличии небольших градиентов, например, концентрации или температуры, возникают потоки вещества и энергии, пропорциональные этим градиентам и стремящиеся устранить имеющуюся неоднородность, возникают переносы, которые мы обсуждали кратко в § 10. Для поддержания существования неравновесного состояния, естественно, должны присутствовать внешние источники тепла и частиц, компенсирующие потери и обеспечивающие стационарное существование плазмы. Именно такова ситуация в стационарных газовых разрядах: слаботочный несамостоятельный газовый разряд в промежутке между двумя электродами с заданной разностью потенциалов, когда за создание заряженной компоненты отвечает внешний ионизатор, может длительное время существовать при наличии такого ионизатора, но прекращается при его выключении. Аналогична, по существу, ситуация и в случае самостоятельного разряда, в котором включается механизм самоподдержания плазмы, так что необходимость во внешнем ионизаторе отпадает, но стационарное существование плазмы, естественно, поддерживается внешним источником, задающим разность потенциалов и обеспечивающим протекание тока, необходимого для поддержания разряда.

Миллионы и миллиарды лет светят звезды, устойчивое существование которых обеспечивает баланс давления вещества и гравитации, контролируемый выделением энергии в ядерных реакциях синтеза в недрах звезды и ее излучением. Как и у плазмы газовых разрядов, так и у плазмы звезд, возможны разные состояния устойчивого стационарного существования, значительно различающиеся по энергосодержанию. При соответствующем изменении режима источника, поддерживающего существование

плазмы, переход между этими состояниями может быть «плавным», без каких-либо катастроф. Например, звезда, лишенная ядерного «горючего», может излучить избыток тепловой энергии и просто потухнуть, но возможны и катастрофические процессы типа вспышек Сверхновых, когда переход звезды в новую устойчивую фазу ее существования носит неустойчивый характер и сопровождается взрывом. Известно много примеров неустойчивого поведения и у плазмы газовых разрядов: возникновение страт, филаментация (шнурование), «шипящие» дуги и прочее.

Особую роль неустойчивости плазмы приобретают в проблеме создании и удержании плазмы в установках по управляемому термоядерному синтезу. Естественно, условия устойчивого удержания плазмы «звездных» температур в лабораторных условиях не были известны изначально, когда термоядерная программа только начиналась. Поэтому историю термоядерных исследований, в определенном смысле, можно трактовать как историю открытия новых неустойчивостей плазмы, разработки и совершенствования методов их подавления. Принято различать [12] *магнитогидродинамические (МГД) неустойчивости* плазмы, сравнительно медленные, но приводящие к макроскопическим последствиям – к катастрофическому нарушению формы плазменного сгустка, выбросам больших сгустков плазмы на периферию, и т.п., а также *микронеустойчивости*, или *кинетические неустойчивости*, обязанные своим происхождением особенностям неравновесной функции распределения частиц плазмы по скоростям. В конечном итоге, эти неустойчивости приводят к генерации в плазме ускоряющих полей и шумов, вызывающих аномально большие потоки тепла и частиц. Естественно, любое конкретное устройство по удержанию плазмы должно в первую очередь удовлетворять условиям макроскопической устойчивости равновесия плазмы, и, когда такие неустойчивости подавлены, на первый план выступают кинетические неустойчивости и уже они главным образом ограничивают время жизни частиц в плазме и время удержания энергии плазмы.

## МГД неустойчивости

- Неустойчивость Релея - Тейлора

Это одна из фундаментальных неустойчивостей, которая имеет многочисленные проявления в Природе. Применительно к плазме ее разновидностью является *желобковая неустойчивость* (см. § 19), называемая также конвективной или перестановочной неустойчивостью [22].

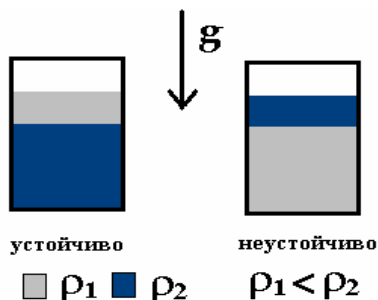


Рис. 4.15. К неустойчивости Релея – Тейлора:  $\rho$  - плотность жидкости

Природу неустойчивости обычно поясняют на следующем простом примере. Пусть в стакан налиты два слоя несмешивающихся жидкостей с разными плотностями (рис. 4.15). Равновесию в поле сил тяжести здесь, очевидно, отвечает горизонтальность границы раздела между жидкостями. Если верхняя из жидкостей имеет меньшую плотность, то эта ситуация будет устойчивой и

малые возмущения не разрушат начальное равновесие. Если же верхняя жидкость имеет большую плотность, то равновесие неустойчиво и малые возмущения его разрушат. В конце концов, тяжелая жидкость «протечет» вниз, жидкости поменяются местами, и система придет к устойчивому равновесию.

Сходная ситуация имеет место на границе между плазмой и однородным магнитным полем. Роль «легкой жидкости» здесь играет магнитное поле, и, если направление ускорения окажется неблагоприятным, то



Рис. 4.16. Желобки на границе плазма – магнитное поле. Кружки с точками условно изображают силовые линии магнитного поля

неблагоприятным, то нарастают желобки, как это качественно показано на рис. 4.16. Для характеристики удержания плазмы в неоднородном магнитном поле обычно вводят параметр

$$\beta = 8\pi r/B^2,$$

характеризующий отношение давления плазмы к давлению магнитного поля (см. § 23). Если  $\beta < 1$ , то говорят о плазме низкого давления, если  $\beta > 1$ , то – высокого. Если магнитным полем удерживается плазма с  $\beta \sim 1$ , то судьба возникающего на границе плазма – магнитное поле плазменного «языка», раздвигающего силовые линии, зависит от того, нарастает или убывает магнитное поле при удалении от плазмы. Если магнитное поле от границы наружу убывает, то поскольку здесь будет  $p > B^2/8\pi$ , то локальное возмущение стремится расти. Наоборот, если магнитное поле растет наружу от границы, то рост возмущения невозможен. В большинстве предложенных магнитных ловушек магнитное поле убывает наружу, поэтому прогноз по устойчивости плазмы высокого давления выглядит неутешительно (без каких-либо дополнительных усилий). К счастью, однако, во многих устройствах плазма принципиально должна быть низкого давления  $\beta \ll 1$ . В этом случае можно обеспечить устойчивость в среднем, если для любой выделенной плазменной трубки будет выполнен принцип «минимума –  $B$ »:

$$\delta \int dl/B < 0,$$

который подробно обсуждался в § 19. Входящий в эту формулу интеграл вдоль силовой линии (вдоль которой ориентирована выделенная нами трубка) как раз и обеспечивает «взвешивание» вклада благоприятных и неблагоприятных участков. Выделенная плазменная трубка удерживается устойчиво, если занимаемый ею объем будет максимален в положении равновесия, что и отражено в написанном критерии.

• Неустойчивость Кельвина – Гельмгольца.

Это еще один пример классической гидродинамической неустойчивости, способной развиваться при наличии неоднородности скорости потока жидкости или плазмы. В простейшем случае в качестве неоднородного потока можно представить себе два несмешивающихся потока жидкости, текущих с разными скоростями выше и ниже границы раздела – тангенциального разрыва (рис. 4.17,а). Если граница потоков возмущается, например, появляется горб, как это показано на рис.

4.17,б, то скорость потока сверху увеличивается, а снизу уменьшается. По теореме Бернулли давление жидкости меняется в противоположном направлении, снизу «горба» оно становится больше и первоначальному возмущению выгодно расти.

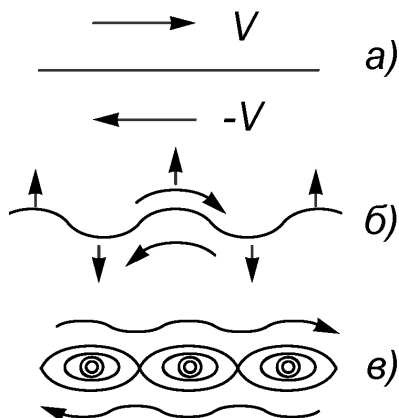


Рис. 4.17. Последовательные стадии развития неустойчивости скачка скорости потоков

В результате слой разбивается на систему изолированных вихрей, из-за характерной формы линий тока (рис. 4.17,в) их называют «кошачьи глаза» Кельвина, открывшего эту неустойчивость еще в позапрошлом веке.

- Разрывная неустойчивость. Перезамыкание силовых линий магнитного поля

Внешне подобно выглядит картина неустойчивости плоскости скачка магнитного поля – так называемого нейтрального токового слоя (рис. 4.18).

Природа неустойчивости здесь иная. Упрощенно ее можно трактовать следующим образом. Равномерно распределенный по плоскости скачка поля токовый слой можно рассматривать как бесконечную совокупность одинаковых эквидистантных элементарных токов. Положение каждого из них является равновесным, так как притяжение соседей справа в точности компенсируется притяжением соседей слева. Но стоит нам нарушить равномерность распределения, сблизив группу из

нескольких токов, как мы обнаружим, что их взаимное притяжение будет сильнее притяжения соседей, они начнут стягиваться в единую изолированную токовую нить – филамент. Результатом развития неустойчивости будет разрыв токового слоя и разбиение его на совокупность филаментов. По этой причине неустойчивость

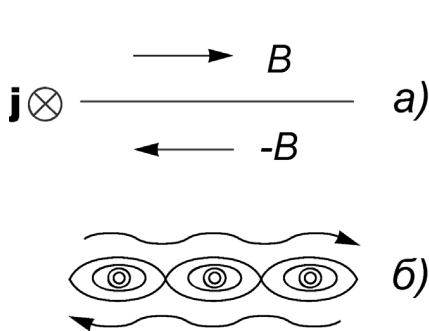


Рис. 4.18. Разрывная неустойчивость токового слоя. Крестиком помечено направление тока в слое (а). Оно сохраняется и в системе филаментов, на которую распадается слой (б)

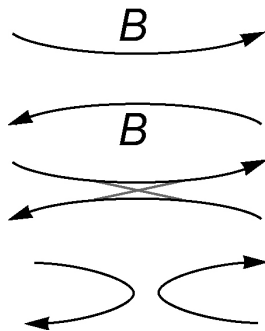


Рис. 4.19. К механизму перезамыкания силовых линий магнитного поля

часто называют *разрывной*, или *тиринг-неустойчивостью* (от английского: *tearing instability*). Физической картине неустойчивости можно придать иную трактовку, если вспомнить, что силовые линии «обладают натяжением», а потому стремятся сократиться (см. § 23). С этой точки зрения «растянутые» силовые линии конфигурации на рис. 4.18,а невыгодны, силовым линиям выгодно «перезамкнуться» через слой, сократив свою длину (рис. 4.19). Это и происходит, как мы видели выше. Термин *перезамыкание* прочно вошел в современную плазменную науку. В токовой плазме токамаков перезамыкание приводит к образованию *магнитных островов*, наличие которых существенно сказывается на процессах переноса.

- Неустойчивости токовых систем ( $Z$  – пинчей)

$Z$  – пинч – это самосжатый столб плазмы с продольным (вдоль оси  $z$ ) током, окруженный создаваемым этим током магнитным полем.

Равновесие здесь обеспечивается балансом магнитного давления и давления плазмы, как это было показано в § 24. Динамические процессы, сопровождающие возникновение такого пинча обсуждались в § 25. Здесь обсудим устойчивость подобного равновесия, полагая для простоты, что ток плазмы полностью скинирован - сосредоточен в основном в приповерхностном слое. Тогда внутри плазмы пинча нет магнитного поля, и равновесие обеспечивается балансом давлений плазмы и магнитного поля на границе (см. рис. 4.20):

$$p_{\text{плаз}} = p_{\text{маг}}, \quad p_{\text{маг}} = \frac{B_{\varphi}^2}{8\pi}, \quad B_{\varphi} = \frac{2I}{ca}. \quad (4.87)$$

Здесь  $a$  – радиус плазменного столба,  $I$  – полный ток, и мы учли, что вне плазмы для прямого столба магнитное поле совпадает с полем прямого провода.

- Перетяжки

Магнитное давление вне пинча увеличивается с уменьшением радиуса, как это очевидно из формулы (4.87). При местном сужении токового канала плазма выдавливается из места сужения (подобно пасте, выдавливаемой из тьюбика, рис. 4.20б), поэтому давление ее не может противодействовать нарастающему давлению магнитного поля, и перетяжке выгодно нарастать. Развитие перетяжек можно предотвратить, если в плазму пинча «вморозить» продольное магнитное поле (рис. 4.20,в). Поток продольного поля сохраняется

$$\Phi = \pi a^2 B_z = \text{const}, \quad B_z \sim a^{-2}, \quad p_{z\text{маг}} \sim a^{-4}, \quad (4.88)$$

а поэтому эта компонента магнитного поля при сжатии увеличивается, и увеличивается соответствующее ему давление внутреннего магнитного поля. Причем оно нарастает, как это видно из сравнения (4.87) и (4.88), быстрее давления внешнего магнитного поля. Это и приводит к возможности стабилизации перетяжек. Можно показать, что перетяжки не будут развиваться, если вмороженное продольное поле будет достаточно велико:

$$B_z > \frac{B_{\varphi}}{\sqrt{2}},$$

где  $B_\varphi$  - магнитное поле тока на границе пинча. Возможность стабилизации перетяжек замороженным полем была подтверждена экспериментально.

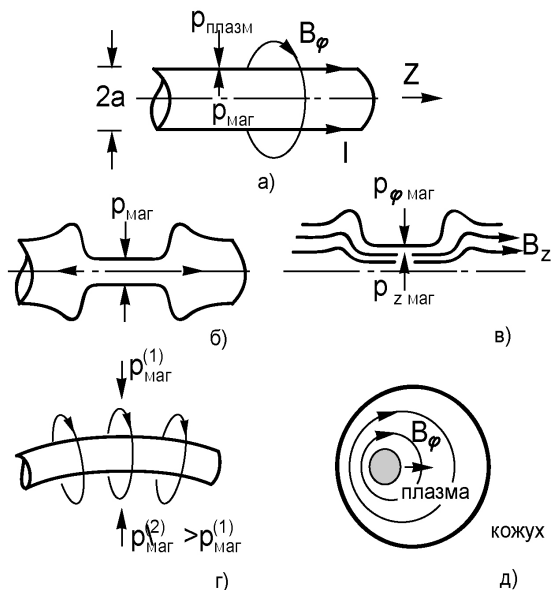


Рис. 4.20. Неустойчивости плазмы с током: а – скинированный пинч; б – перетяжка; в – стабилизация перетяжки продольным полем: в области пережатия силовые линии сгущаются, давление внутреннего поля нарастает; г – изгиб - «змейка»; д – стабилизация изгиба проводящим кожухом

• «Змейка»

«Змейка» – это неустойчивость токового канала к изгибу (рис. 4.20,г). Наглядно причину развития неустойчивости можно пояснить следующим образом: при изгибе, как это качественно показано на рис. 4.20,г, силовые линии магнитного поля снаружи места изгиба разрежаются, а внутри – сгущаются. В результате появляется сила, усиливающая первоначальное возмущение, так что изгибу выгодно расти. Нарастание изгибов канала разряда неоднократно наблюдалось в экспериментах на Z-пинчах.

«Змейки» можно стабилизировать, если окружить плазму хорошо проводящим кожухом (реально именно так и делают,



плазменный шнур окружают массивным медным кожухом). При быстром изгибе токового канала магнитное поле за счет скин-эффекта не успевает проникнуть в проводящий кожух, и силовые линии магнитного поля тока оказываются «зажаты» между стенкой и плазмой (см. рис. 4.20, д.). Ввиду сохранения потока, в этой области магнитное поле станет больше, чем на диаметрально противоположной стороне токового канала, и возникает сила, стремящаяся восстановить равновесие. Поскольку механизм стабилизации существенно связан со временем скинирования, медленный изгиб, очевидно, стабилизироваться не может. В этом случае более эффективно управлять положением токового шнура с помощью дополнительных проводников с током, располагаемых на периферии плазмы.

- Винтовая неустойчивость. Критерий Шафранова - Крускала

Возникновения змеек можно было бы избежать, если снаружи окружить пинч продольным магнитным полем. Но ситуация здесь не такая однозначная, как может показаться на первый взгляд. Внешнее магнитное поле складывается с магнитным полем тока пинча, и образуется конфигурация с винтовыми силовыми линиями (рис. 4.21, а). При изгибе токового канала действующие на разные его участки силы Ампера со стороны внешнего поля «скручивают» плазменный шнур, как это показано на рис. 4.21, б, и шнур стремится завиться в винт. Это и определило название обсуждаемой неустойчивости. Сила Ампера, действующая на ток в магнитном поле, исчезает, когда ток параллелен силовой линии. Именно такое положение и стремится занять токовый шнур, завиваясь в винт. Нетрудно подсчитать шаг винтовой силовой линии. Так как длина окружности в сечении шнура радиуса  $a$  составляет  $2\pi a$ , а при однократном обходе вокруг шнура смещение равно шагу силовой линии  $h$ , то, умножив длину окружности на соответствующий угловой коэффициент, получаем

$$h = 2\pi a \frac{B_z}{B_\phi}. \quad (4.89)$$

Если учесть, что концы шнура «вморожены» в хорошо проводящие электроды, как это показано на рис. 4.21, б, то в промежутке длины  $L$  не уложится ни одного шага винта, а, значит,

винтовая неустойчивость развиваться не сможет, если выполнено условие

$$h = 2\pi a \frac{B_z}{B_\varphi} > L. \quad (4.90)$$

Это и есть критерий устойчивости относительно развития винтовых возмущений. Мы видим, что для подавления винтовой неустойчивости продольное поле в соответствии с этим критерием должно быть достаточно сильным. Слабое продольное поле только ухудшает ситуацию в плане устойчивости, так как условие (4.90) может нарушаться.

Для систем с замкнутым плазменным шнуром, как это имеет место в тороидальной магнитной ловушке, например в токамаке (см. Главу 9), роль длины системы выполняет длина самого замкнутого шнура. Если его большой радиус равен  $R$  (см. рис. 2.6), то, подставив в (4.90) в качестве длины  $L$  длину окружности большого радиуса  $2\pi R$ , получим *критерий устойчивости Шафранова – Крускала* [23]:

$$q = \frac{h}{2\pi R} = \frac{a}{R} \frac{B_z}{B_\varphi} > 1. \quad (4.91)$$

где  $q$  – так называемый *коэффициент запаса устойчивости*.

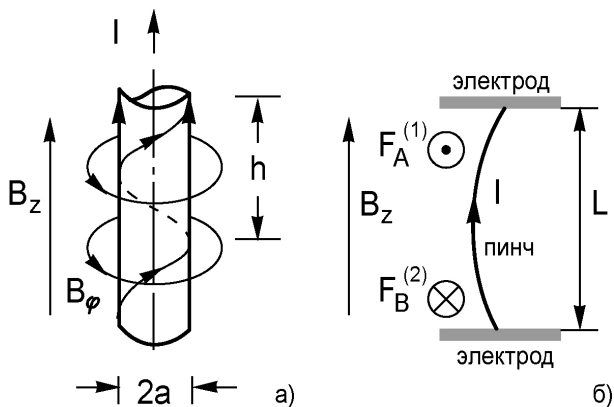


Рис. 4.21. Винтовая неустойчивость

Применительно к токамакам, продольное поле  $B_z$  принято называть тороидальным, а поле тока  $B_\varphi$  – полоидальным. Согласно критерию Шафранова – Крускала тороидальное поле должно быть очень большим, если диаметр сечения шнура значительно меньше его длины по большому радиусу. В этом случае, оценивая величину полоидального поля тока плазменного шнура как

$$B_\varphi = \frac{2I}{ca},$$

можем записать критерий устойчивости как условие, ограничивающее допустимый ток в токамаке:

$$I < I_{max} = c \frac{a^2}{R} B_z. \quad (4.92)$$

Это условие определяет одну из границ рабочей области для такой системы (так называемый предел по току, см.рис.9.3).

Подчеркнем в заключение, что критерий Шафранова – Крускала является критерием глобальной устойчивости, т.е. устойчивости плазменного шнура в целом, и не гарантирует локальной устойчивости. Например, один из критериев локальной устойчивости (критерий Сайдема) записывается в виде

$$\frac{8\pi p'(r)}{B^2} (1 - q^2) + \frac{1}{4} s^2 > 0, \quad p'(r) = \frac{dp}{dr}, \quad s = \frac{d}{dr} \ln q. \quad (4.93)$$

Здесь последнее слагаемое – *шир* (или перекрещенность) силовых линий всегда оказывает стабилизирующее действие. Так как в поперечном сечении шнура давление плазмы  $p(r)$  по мере удаления от центра убывает, то для устойчивости, при малом шире, должно быть  $q > 1$  в соответствии с критерием Шафранова – Крускала. Если окажется так, что на периферии плазменного шнура будет  $q(a) > 1$ , то глобально шнур будет устойчив. Но если при этом в центре шнура окажется  $q(0) < 1$ , то возможно развитие *внутренней винтовой моды*, вызывающей «выворачивание» шнура «наизнанку» и появление пилообразных колебаний его температуры, вследствие перемешивания горячей центральной и холодной периферийной плазмы шнура.

## § 37. Кинетические неустойчивости плазмы

- Механизм обратного поглощения Ландау

Кинетические эффекты становятся существенными, когда фазовая скорость волн оказывается порядка характерной скорости частиц плазмы. Одно из проявлений этих эффектов – бесстолкновительное затухание Ландау, приводящее к затуханию волн в максвелловской плазме. Наличие (или отсутствие) бесстолкновительного затухания определяется знаком производной по скорости от функции распределения в резонансной точке, задаваемой условием черенковского резонанса

$$\omega - \vec{k}\vec{v} = 0,$$

или, другими словами, затухание определяется соотношением количества частиц, скорость которых выше или ниже фазовой скорости волны. Если последних больше, то энергия волны поглощается (§ 33). При наличии в плазме интенсивного пучка частиц (см. рис. 4.22, «горб» на этом рисунке отвечает превышению числа частиц с соответствующей скоростью в пучке над числом частиц, соответствующих максвелловскому распределению), затухание резонансной волны может смениться раскачкой. В этом случае говорят об обратном механизме поглощения Ландау. Если скорость частиц пучка достаточно большая, то частоты резонансных волн будут велики, а длины волн – малы. В этом отношении такие неустойчивости, в отличие от МГД-неустойчивостей, преимущественно мелкомасштабные и, казалось бы, не могут приводить к глобальным последствиям. Мы уже знаем, однако, что наличие интенсивных шумов в плазме может приводить к эффективному увеличению частоты столкновений частиц (рассеяние на волнах), вызывающему аномальные эффекты в процессах переноса: аномально высокая скорость диффузии и теплопроводность, аномально большое сопротивление плазмы и т.п.

Итак, кинетические неустойчивости есть следствие отступления от равновесной, максвелловской функции распределения. Неравновесные условия могут реализоваться не только при наличии пучка. Например, в адиабатической ловушке (§ 33) функция распределения «обедняется» за счет ухода медленных

частиц в опасный конус потерь (рис. 4.23). Это создает благоприятные условия для раскачки разновидностей «конусных» неустойчивостей (например, одна из наиболее опасных – дрейфово-конусная неустойчивость [12]), ограничивающих время жизни плазмы в ловушке.

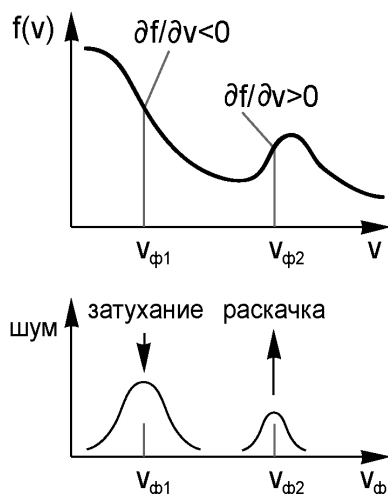


Рис. 4.22. Резонансное взаимодействие волн и частиц в плазме

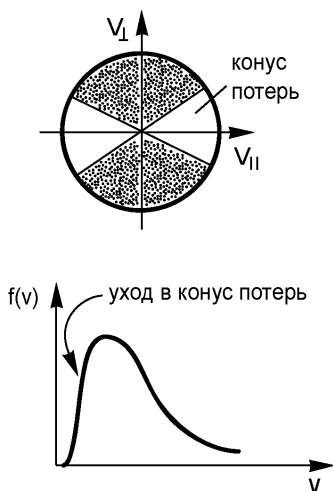


Рис. 4.23. Неравновесная функция распределения частиц в адиабатической ловушке

Причиной неустойчивости может быть и наличие потоков плазмы, если найдется подходящая волна с фазовой скоростью, близкой к скорости потока. Именно такова может быть ситуация при наличии систематических дрейфовых потоков плазмы (§ 17). Например, скорость ларморовского дрейфа, обязанного своим происхождением неоднородности плотности замагниченной плазмы, по порядку величины составляет

$$v_{dp} \sim v_T \rho_B / L,$$

где  $L$  – характерный размер неоднородности. С этой скоростью можно связать частоту соответствующей дрейфовой волны. Если, например,  $B \parallel z, \nabla n \parallel x$ , то волна распространяется в направлении оси  $y$ :

$$\omega = k_y v_{dp}.$$

- Пучковая неустойчивость

Одним их простейших примеров кинетической неустойчивости является неустойчивость пучка электронов, пронизывающего плазму.

Рассмотрим наиболее простой случай раскочки продольных волн, когда через холодную плазму ( $T_e \rightarrow 0$ ,  $T_i \rightarrow 0$ )  $n_{oi} = n_{oe} = n_o$ , проходит холодный пучок электронов ( $v_{no} \neq 0$ ,  $n_{no} \neq 0$ ) малой плотности. Дисперсионное уравнение для этого случая записывается в виде:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_n^2}{(\omega - kv_{no})^2} = 0. \quad (4.94)$$

Первые два слагаемых здесь отвечают холодной плазме (см. § 29), а последнее описывает вклад холодного пучка электронов. Здесь  $\omega_{Le}$ ,  $\omega_{Li}$  и  $\omega_n$  – ленгмюровские частоты для электронов плазмы, ионов плазмы и электронов пучка соответственно,  $v_n$  – скорость электронов пучка.

Это полное уравнение 4-й степени, приводимое к канонической форме. Приближенное решение его было предложено Я.Фейнбергом из довольно наглядных физических соображений. Известно, что при прохождении пучка через плазму возникают (точнее, могут возникать при определенных условиях) колебания с нарастающей во времени амплитудой. Развивается так называемая *пучковая неустойчивость*. Она является частным случаем неустойчивостей, обусловленных наличием участков с положительной производной части функции распределения. Из рис. 4.22 видно, что с волной взаимодействуют частицы плазмы, скорость которых близка к скорости волны  $v_{\phi 2}$ . Кажется, возникает противоречие: сначала приняли  $T_e \rightarrow 0$ , а теперь должны принять, что часть электронов плазмы имеют тепловую скорость, близкую к фазовой скорости волны. Но условие  $T_e \rightarrow 0$  еще не значит, что температура тождественно равна нулю (такого не бывает), а обозначает только, что скорости, приобретаемые в электрических полях, много больше тепловых. Следовательно, противоречия нет. Однако в нашем случае пренебрежем вкладом  $\omega_{Li}^2 \ll \omega_{Le}^2$ , и будем рассматривать  $\omega \rightarrow \omega_n \rightarrow kv_{no}$ . Так как, по предположению, плотность пучка мала,  $n_n \ll n_o$ , то примем

$$\omega \cong \omega_{Le} + \delta\omega \cong kv_{no} + \delta\omega, \quad |\delta\omega| \ll \omega_{Le}. \quad (4.95)$$

Подставляя это в (4.94) и разлагая в ряд по малой величине, получим

$$1 - 2 \frac{\delta\omega}{\omega_{Le}} + \frac{\omega_n^2}{\delta\omega^2} = 1, \text{ т.е. кубическое уравнение}$$

$$2\delta\omega^3 - \omega_n^2 \omega_{Le} = 0. \quad (4.96)$$

Это уравнение всегда имеет решение с положительной мнимой частью, что и дает величину инкремента (скорости роста) возмущений:

$$\delta\omega = i\gamma, \quad \gamma \cong \left( \frac{1}{2} \omega_n^2 \omega_{Le} \right)^{1/3} = \omega_{Le} \left( \frac{n_{no}}{n_o} \right)^{1/3}. \quad (4.97)$$

Поскольку возмущения всех величин ( $n_e, \bar{v}_e, n_n, \bar{v}_n, \bar{E}$ ) пропорциональны  $e^{-i\omega t + i\bar{k}\bar{r}}$ , то они будут увеличиваться пропорционально  $e^{\gamma t}$ . Величина  $\gamma$  называется *инкрементом* и определяет скорость нарастания амплитуды волны во времени. Заметим также, что возмущения для этой неустойчивости являются сносowymi (увлекаются пучком), так как решение имеет ненулевую действительную часть частоты. Важно отметить также, что изложенное приближенное решение позволяет оценить лишь величину максимального инкремента неустойчивости. Между тем, уже из самого уравнения (4.94) очевидно, что короткие волны, для которых  $|k| \gg \omega_{Le}/v_{no}$ , раскачиваться не могут. Другими словами, неустойчивость имеет коротковолновый порог, как можно показать, равный

$$|k_{no\text{ пор}}| = 2(\omega_{Le}/v_{no}) \left[ I + (n_n/n_o)^{2/3} \right]^{3/2} \cong 2(\omega_{Le}/v_{no}). \quad (4.98)$$

Порог, как мы видим, определяется величиной формально похожей на дебаевский радиус, однако вместо тепловой скорости, которая в нашем случае равна нулю, входит скорость частиц пучка.

Для других пучковых неустойчивостей инкременты будут другими. Например, для *бунемановской (токовой) неустойчивости* относительного движения ионов и электронов, описываемой сходным с (4.94) уравнением

$$\varepsilon = I - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega - kv_{eo})^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} = 0, \quad (4.99)$$

максимальный инкремент, как можно показать, будет зависеть от отношения масс электронов и ионов

$$\gamma \approx \omega_{Le} \left( \frac{m_e}{M_i} \right)^{1/3}. \quad (4.100)$$

Эта неустойчивость также пороговая, однако, в отличие от предыдущего случая, сноса нет и фактически это стоячие аperiодически нарастающие возмущения.

При наличии пучков неустойчивости всегда имеют возможность развиваться, естественно, при условии преодоления порога, если в спектре шумов плазмы найдется возмущение с подходящей длиной волны.

## ГЛАВА 5

### ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

#### §38. Аналогия световой и электронной оптики

Пучки в электронной оптике, как правило, считаются достаточно редкими, так что электрические и магнитные микрополя собственного объемного заряда пучка пренебрежимо малы по сравнению с макрополями отклоняющей системы (линейная оптика). Уже первые эксперименты в конце 19 века с катодными лучами показали, что законы распространения электронных лучей подобны законам распространения световых лучей в геометрической оптике. Физическим обоснованием аналогии между прохождением электронного луча в электрическом поле с постепенно изменяющимся потенциалом и прохождением светового луча через среду с изменяющимся коэффициентом преломления (*оптико-механическая аналогия*) является сходство между обычной механикой и геометрической оптикой. И для движения материальной точки и для д $\lambda$  светового луча

известен вариационный принцип Гамильтона:  $\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$ , где  $t_0$  и

$t_1$  время в начальной и конечной точках траектории,  $L(q, \dot{q}, t)$  – функция Лагранжа является функцией обобщенных координат,

скоростей и времени. Равенство нулю вариации интеграла означает, что этот интеграл, взятый вдоль действительной траектории  $q$ , имеет экстремум (минимум) по сравнению с другими возможными виртуальными траекториями (рис. 5.1).

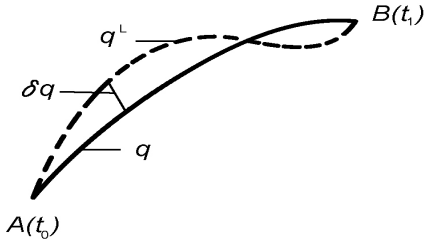


Рис. 5.1. Действительная и виртуальная траектория частицы



Функция Лагранжа для материальной частицы равна разности между кинетической и потенциальной энергией  $L = T - U$ . Для электрона, движущегося в чисто электростатическом поле,  $L = mv^2/2 - (-e\varphi)$ . В присутствии магнитного поля  $\vec{B}$  функция Лагранжа  $L = mv^2/2 - (-e\varphi) + (-e \vec{A}\vec{v}/c)$ , где  $\vec{A}$  - векторный потенциал магнитного поля ( $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ). Вариационный принцип Гамильтона  $\delta S = 0$  называется *принципом наименьшего действия* (интеграл

$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$  называется *интегралом действия*, или просто *действием*

ем). Если ввести обобщенный импульс  $\vec{P} = \vec{p} - \frac{e}{c} A\vec{l}$ , где  $\vec{l}$  - единичный вектор, направленный по касательной к траектории, то движение частицы, при условии постоянства ее полной энергии ( $T + U = \text{const}$ ), определяется аналогом принципа наименьшего действия - *принципом Мопертюу*:  $\delta \int_A^B \vec{P} d\vec{l} = 0$ . Этот принцип для движения материального тела в постоянном потенциальном поле аналогичен принципу Ферма геометрической оптики для световых лучей:  $\delta \int_A^B n dl = 0$ , который означает минимальность оптической длины на реальном пути света. То есть оптический путь для светового луча  $\int_A^B n dl$  - самый короткий, где  $n$  - показатель преломления среды,  $dl$  - элемент траектории луча. Если  $n = \text{const}$ , то преломление луча отсутствует и свет распространяется прямолинейно. Из принципа Ферма вытекает известный закон преломления световых лучей, который задает соотношение между углом падения  $\alpha$  и углом преломления  $\beta$  (углы между лучом и нормалью к границе раздела):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ где } n_1 \text{ и } n_2 - \text{коэффициенты преломления сред [27].}$$

В случае электронов их компонента скорости, перпендикулярная электрическому полю, не меняется, а модуль скорости пропор-

ционален  $\sqrt{U}$ , где  $U$  – потенциал относительно точки, в которой скорость электрона равна нулю. Поэтому в электронной оптике  $\sqrt{U}$  играет роль показателя преломления среды, а закон преломления имеет вид:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{U_2}}{\sqrt{U_1}}, \quad (5.1)$$

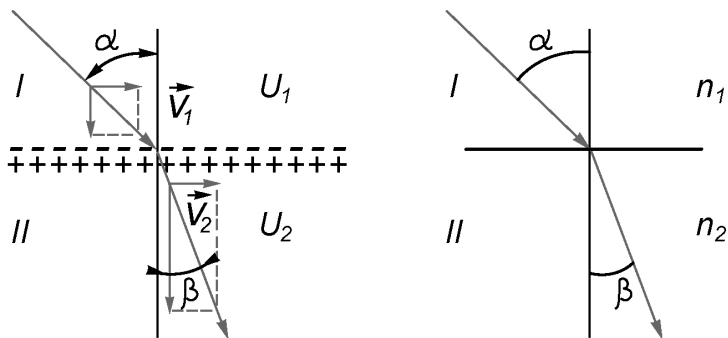


Рис. 5.2. Преломление пучка заряженных частиц на границе потенциалов (а) и света на границе двух сред (б)

если считать, что на границе раздела потенциал скачком меняется от  $U_1$  до  $U_2$ . Резкий скачок потенциала на пути электронного пучка можно создать между двумя металлическими сетками с мелкими ячейками, расположенными на близком расстоянии друг от друга, (рис. 5.2). Таким образом, по аналогии со световой оптикой можно говорить об электронных лучах, и для них создавать аналогичные устройства фокусировки (линзы) и разделения по энергиям (спектрометры). Условие применимости геометрической оптики для электронов (т. е., когда электрон можно рассматривать как частицу) выполняется, когда длина волны электрона

$$\lambda[\text{Å}] = \frac{h}{mv} \approx \frac{12.25}{\sqrt{U[B]}}$$

( $U$  – ускоряющее напряжение) мала по сравнению с характерным размером неоднородностей системы. Но у электронной оптики есть

и существенные отличия от световой, они в основном состоят в следующем:

1. Отдельные лучи в световой оптике независимы, а электронные лучи взаимодействуют друг с другом.
2. Показатель преломления для электронов всегда непрерывен, для света же он, как правило, меняется скачком.
3. Диапазон изменения показателя преломления для электронов не ограничен, в оптике  $n \leq 4$ .
4. Скорость электронов тем больше, чем больше показатель преломления, а скорость света в среде, наоборот, падает с ростом  $n$ .
5. Преломляющие поверхности для электронов, в отличие от световых лучей, не могут быть произвольными – распределение потенциалов всегда удовлетворяет уравнению Лапласа (линейная электронная оптика) или Пуассона (нелинейная электронная оптика).

### §39. Электростатические линзы

Для фокусировки заряженных частиц чаще всего используют диафрагмы (плоские электроды с круглым отверстием) с аксиально-симметричным распределением потенциала  $U(z,r)$ , который не зависит от азимутального угла  $\theta$ . В разложении  $U$  по степеням  $r$  будут только четные степени:

$$U(z,r) = b_0(z) + b_2(z)r^2 + b_4(z)r^4 + \dots + b_{2k}(z)r^{2k} + \dots \quad (5.2)$$

Подставляя это выражение в уравнение Лапласа (в промежутке между электродами нет зарядов) в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (5.3)$$

можно найти коэффициенты разложения, получив в итоге распределение потенциала в виде:

$$U(r, z) = U(z) - \left(\frac{r}{2}\right)^2 U''(z) + \frac{1}{2^2} \left(\frac{r}{2}\right)^4 U^{IV}(z) - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^6 U^{VI}(z) + \dots + (-1)^k \frac{U^{(2k)}(z)}{(k!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}, \quad (5.4)$$

которое полностью определяется распределением потенциала на оси системы  $U(z) = U(0, z)$ . Это сильно упрощает расчет движения электронов. Для приосевых электронов, движущихся примерно параллельно оси ( $r/L_{\text{хар}} \ll 1$ ,  $\partial r / \partial z \ll 1$ , где  $L_{\text{хар}}$  – характерный поперечный размер системы), которые еще называют *параксиальными*, можно получить уравнение траектории. Для этого в распределении потенциала пренебрегаем слагаемыми со степенями выше  $r^2$ , тогда уравнения движения электрона приобретает вид:

$$\begin{cases} m \ddot{r} = -eE_r \approx -\frac{er}{2} U''(z) \\ m \ddot{z} = -eE_z \approx eU'(z) \end{cases}. \quad (5.5)$$

Первое уравнение системы замечательно тем, что в полях с аксиальной симметрией радиальная фокусирующая или расфокусирующая сила пропорциональна удалению частицы от оси. Однако следует иметь в виду, что это приближение и наличие в разложении фокусирующей силы слагаемых со степенями больше единицы приводит к искажениям изображения – абберациям. Учитывая, что левые части уравнения содержат производные по времени, а правые производные по  $z$ , можно использовать переход к производной по переменной  $z$ :

по переменной  $z$ :  $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ . Тогда, интегрируя второе

уравнение с учетом граничного условия при  $z = 0$   $U(0) = 0$  и  $\left.\frac{dz}{dt}\right|_0 = 0$  (пренебрегаем начальной скоростью электронов, эмитируемых с катода с тепловой энергией, много меньшей приобретаемой энергии в ускоряющем потенциале), получим  $\frac{dz}{dt} = \sqrt{2eU(z)/m}$ . Используя это соотношение для интегрирования второго уравнения и

переходя к производной по  $z$ :  $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \left( \frac{dr}{dz} \frac{dz}{dt} \right)$ , получим уравнение траектории  $r(z)$  параксиального пучка:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{U'(z)}{2U(z)} \frac{dr}{dz} + \frac{U''(z)}{4U(z)} r = 0, \quad (5.6)$$

которое называется *основным уравнением электронной оптики*. Полученное линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно  $U(z)$  и  $r(z)$  показывает, что возможно масштабное моделирование, т. е. если потенциал во всех точках пространства увеличить в  $k$  раз (увеличить потенциал на всех электродах системы в одинаковое число раз), то уравнение, а следовательно, и траектория электрона не изменится. Кроме того, уравнение не содержит отношения  $e/m$ , поэтому траектории электронов и ионов не отличаются.

Если предметная плоскость находится при  $z = a$ , а плоскость изображения при  $z = b$  (рис. 5.3), то линейное увеличение линзы

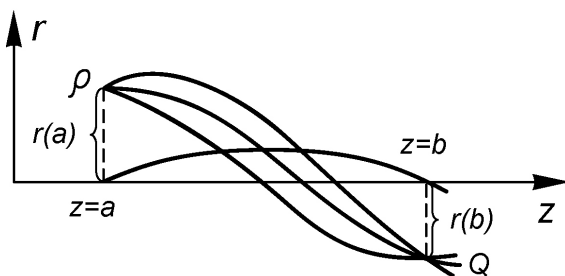


Рис. 5.3. Изображение точки в линзе

$M = \frac{r(b)}{r(a)}$ , где  $r(a)$  и  $r(b)$  расстояние до траектории от оси системы. Угловое увеличение линзы, определяемое как отношение тангенсов углов наклона траектории к оси,  $G = \frac{\text{tg} \gamma_2}{\text{tg} \gamma_1} = \frac{r'(b)}{r'(a)}$  (рис. 5.4).

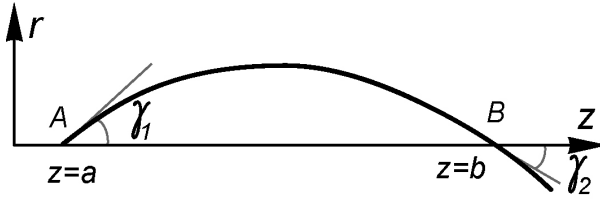


Рис. 5.4. Углы, образуемые траекторией с осью в предметной плоскости и точке изображения

Из основного уравнения электронной оптики можно получить соотношение между линейным и угловым увеличением линзы [28]:

$$M \cdot G = \frac{\sqrt{U(a)}}{\sqrt{U(b)}} \quad (5.7),$$

которое является аналогом теоремы Лагранжа-Гельмгольца для световой оптики:  $M \cdot G = \frac{n_1}{n_2}$ . Фокусные расстояния слева  $f_1$  и

справа  $f_2$  от главных плоскостей  $h_1$  и  $h_2$  электронной линзы можно определить через траектории, проходящие через фокус линзы ( $r_1$ ) и параллельно оси ( $r_2$ ) системы (рис. 5.5):  $f_1 = \frac{r_1(b)}{r_1'(a)}$ ,  $f_2 = \frac{r_2(a)}{r_2'(b)}$ .

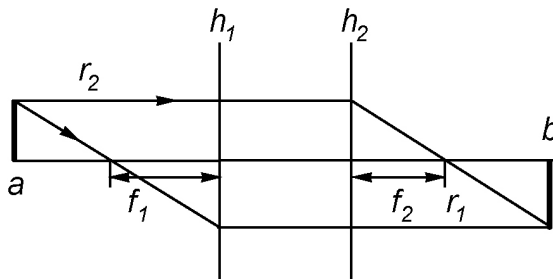


Рис. 5.5. Ход главных лучей в электростатической линзе

### ***Тонкие электростатические линзы***

Рассмотрим тонкие линзы, главные плоскости которых находятся при  $z = a$  и при  $z = b$ . Для тонких линз расстояние между

главными плоскостями много меньше фокусных расстояний  $(b - a) \ll f_1, f_2$ , т. е. главные плоскости сливаются, фокусные расстояния слева и справа определяются соответственно соотношениями:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{4\sqrt{U(a)}} \int_a^b \frac{U''(z)}{\sqrt{U(z)}} dz \quad \text{и} \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{4\sqrt{U(b)}} \int_a^b \frac{U''(z)}{\sqrt{U(z)}} dz. \quad (5.8)$$

Отношение фокусных расстояний:  $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\sqrt{U(a)}}{\sqrt{U(b)}}$ .

Оптическая сила:

$$D = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{4\sqrt{U(b)}} \left( \frac{U'(b)}{\sqrt{U(b)}} - \frac{U'(a)}{\sqrt{U(a)}} \right) + \frac{1}{8\sqrt{U(b)}} \int_a^b \frac{(U'(z))^2}{U^{3/2}(z)} dz. \quad (5.9)$$

Если электрическое поле справа и слева от линзы равно нулю ( $U'(a) = U'(b) = 0$ ), то  $D > 0$  (последнее слагаемое всегда положительное), т. е. линза всегда собирающая. Физическая причина фокусирующего эффекта такой линзы состоит в том, что и расстояние от оси (а значит и фокусирующая сила) и время движения электрона на фокусирующих участках всегда больше, чем на расфокусирующих.

Для одиночной диафрагмы с круглым отверстием:

$$D = \frac{1}{f_d} = \frac{E_1 - E_2}{4U_d}, \quad (5.10)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  – значения проекций напряженности электрического поля на ось системы слева и справа от диафрагмы,  $U_d$  – потенциал диафрагмы.

Для системы из двух линз – диафрагм с фокусами  $f_1$  и  $f_2$  и расстоянием между линзами  $l$  оптическая сила задается соотношением:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{l}{f_1 f_2} . \quad (5.11)$$

В общем случае аксиально-симметричного поля траектория электрона описывается уравнениями системы (5.5), т.е. фокусирующая сила определяется знаком второй производной от потенциала на оси системы. Если  $U''(z) > 0$ , то система фокусирующая, если  $U''(z) < 0$ , то расфокусирующая.

В общем случае для расчета непараксиальных пучков в электростатических системах эффективно используют пакеты прикладных программ. Наиболее известен пакет SIMION. В настоящее время доступны уже версии SIMION-7.0 и SIMION-8.0, которые позволяют рассчитать распределение по **A** **B** **C** ии заряженных частиц в них для аксиально-симметричных систем. На рис.5.6 в качестве примера приведено распределение потенциальной энергии и траектории ионов в системе из 2-х цилиндрических линз (линза Эйнцеля), на центральный цилиндрический электрод (B) подан положительный потенциал, а электроды A и C заземлены.

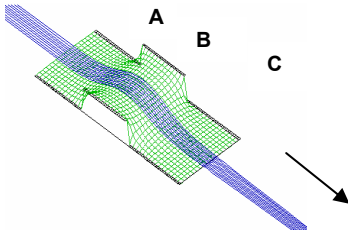


Рис.5.6а. Потенциальная энергия положительных ионов в системе 3-х цилиндрических электродов (линза Эйнцеля) (расчет по коду SIMION-7.0)

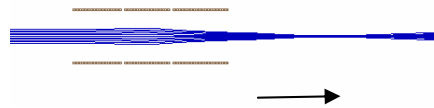


Рис.5.6б. Траектории ионов в системе из 3-х цилиндрических электродов (расчет с помощью кода SIMION)

## §40. Магнитные линзы

Фокусировку пучков в аксиально-симметричном магнитном поле проще всего продемонстрировать на примере параксиального пучка электронов, скорость которых вдоль оси системы много больше скорости в радиальном направлении  $v_z \gg v_r$ . На электрон в



магнитном поле действует сила Лоренца  $\vec{F} = -\frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$ . Радиальная составляющая этой силы является фокусирующей:  $F_r = -(e/c)v_\phi B_z$  (рис. 5.7).

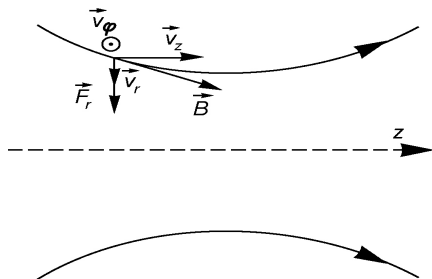


Рис. 5.7. Фокусировка в аксиально-симметричном магнитном поле

Азимутальная составляющая скорости электрона появляется за счет азимутальной составляющей силы Лоренца:

$$F_\phi = -(e/c)(v_z B_r + v_r B_z) \approx -(e/c)v_z B_r,$$

так как  $v_z \gg v_r$ . Составляющая скорости  $v_z$  не меняет знака, радиальная составляющая магнитного поля  $B_r$  меняет знак, при этом азимутальная составляющая скорости электрона  $v_\phi$  будет уменьшаться

(вращение замедлится), но направление вращения никогда не меняется, поэтому фокусирующая составляющая силы Лоренца  $F_r$  всегда сохраняет знак. Таким образом, магнитная линза всегда собирающая.

С учетом теоремы Гаусса, дающей соотношения между продольной  $B_z$  и радиальной компонентами  $B_r$  аксиально-симметричного магнитного поля  $B_r = -(r/2)(dB_z/dz)$ , движение электронов вдоль оси описывается уравнением:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e^2}{4m^2 c^2} r^2 B_z \frac{dB_z}{dz^2}. \quad (5.13)$$

Азимутальное движение (поворот) описывается уравнением:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{eB_z}{2mc} \quad (5.14)$$

(ларморовское вращение), т. е. угловая скорость всех электронов (не зависимо от расстояния от оси) одинакова и изображение вращается как целое, причем, направление вращения зависит от направления магнитного поля. Если магнитное поле удовлетворяет

условию:  $\int_a^b B_z(z) dz = 0$ , то вращение изображения будет отсутствовать. Учитывая, что для параксиальных пучков  $v_z \gg v_r$  (в приближении  $\frac{mv^2}{2} \approx U_0$ ), движение по радиусу задается уравнением:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{eB_z^2}{8mc^2 U_0} r, \quad (5.15)$$

где  $U_0$  – энергия электронов. Данное уравнение описывает траекторию в плоскости, которая вращается с ларморовской частотой. Как видно из уравнений движения, траектория электрона полностью определяется значением магнитного поля на оси  $B_z$ . В уравнения входят заряд и масса, следовательно, разные частицы движутся по разным траекториям. Уравнения линейны и однородны относительно расстояния от оси  $r$ , следовательно, любое аксиально-симметричное поле способно создать изображение и является линзой.

Для тонкой магнитной линзы (магнитное поле на оси быстро падает по мере удаления от линзы) оптическая сила:

$$\frac{1}{f} = \frac{e}{8mc^2 U_0} \int_a^b B_z^2 dz$$

или

$$\frac{1}{f} \left[ \frac{1}{\text{см}} \right] = \frac{0.022}{U_0 [\text{эВ}]} \int_a^b B_z^2 [\text{Гс}] dz. \quad (5.16)$$

Угол поворота в магнитной линзе:

$$\varphi(z) = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{e}{8mU_0}} \int_a^b B_z dz$$

или

$$\varphi[\text{рад}] = \frac{0.15}{\sqrt{U_0[\text{эВ}]}} \int_a^b B_z[\text{Гс}] dz. \quad (5.17)$$

Для магнитного витка с током  $I$  радиуса  $R$  магнитное поле  $B_z = \frac{B_m}{(1 + \frac{z^2}{R^2})^{3/2}}$ , где  $B_m$  – поле в центре витка (формула Био-

Савара). Интегрируя (5.16), можно найти фокусное расстояние для одного токового витка:

$$f[\text{см}] \approx 96.8 \frac{U_0[\text{эВ}]R[\text{см}]}{I^2[A]}. \quad (5.18a)$$

Для катушки из  $N$  витков:

$$f[\text{см}] \approx 96.8 \frac{U_0[\text{эВ}]R[\text{см}]}{(NI[A])^2}. \quad (5.18б)$$

Угол поворота:

$$\varphi[\text{рад}] \approx 10.7 \frac{NI[A]}{\sqrt{U_0[\text{эВ}]}}. \quad (5.19)$$

Для экранированной линзы  $f_s = kf$ , где  $k$  – поправочный коэффициент,  $k = 0.5 \div 0.7$ .

## §41. Отклоняющие и фокусирующие электронно-оптические системы

Отклонение и фокусировка заряженных частиц в электрическом и магнитном полях широко используется в устройствах и приборах для создания и диагностики плазмы, а также для исследования процессов взаимодействия плазмы с твердым телом. Рассмотрим некоторые из таких систем.

### *Электростатические энергоанализаторы*

Электростатические энергоанализаторы чрезвычайно распространены в плазменных исследованиях ввиду их компактности, простоты конструкции и питания. Анализаторы могут быть с за-

держивающим полем (интегральные) и дисперсионные. В первом случае энергетический спектр анализируемых частиц находится путем дифференцирования зависимости приходящего на установленный за сеточными электродами коллектор (многосеточный зонд), во втором путем воздействия электрическим полем на траекторию. Рассмотрим три простых дисперсионных анализатора. Наиболее простой является система в виде *плоского конденсатора*.

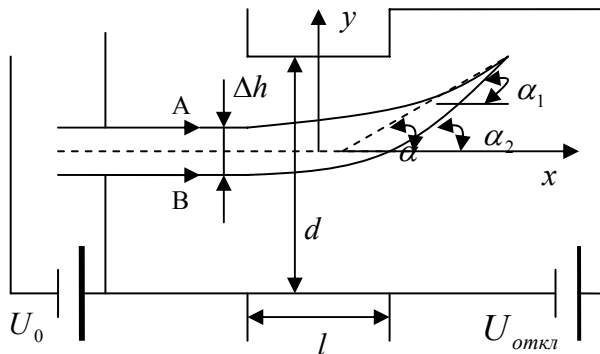


Рис. 5.8. Фокусировка в электростатическом поле плоского конденсатора

Если пучок частиц запускается параллельно пластинам (рис. 5.8), то угол отклонения пучка  $\alpha$  зависит от энергии частиц  $U_0$ :

$$\alpha(U_0) \approx (U_{откл} \ll U_0) \approx \frac{U_{откл}}{2U_0} \frac{l}{d}, \quad (5.20)$$

где  $U_{откл}$  – разность потенциалов, приложенная к плоским электродам,  $l$  – длина пластин вдоль движения пучка,  $d$  – расстояние между пластинами. Благодаря различным значениям потенциала на верхней и нижней границе пучка, а значит и различным скоростям частиц, происходит фокусировка пучка. Поэтому, такие системы используются в электронно-лучевых экранах. Можно оценить фокусное расстояние (расстояние от центра системы до точки фокусировки) найдя значение  $\Delta\alpha$ :

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = U_{\text{откл}} l \frac{U_{\text{откл}} (d + \Delta h - d + \Delta h)}{\left(2U_0 d + U_{\text{откл}} \cdot (d - \Delta h)\right) \left(2U_0 d + U_{\text{откл}} \cdot (d + \Delta h)\right)} \approx$$

$$\approx \frac{U_{\text{откл}}^2 l \Delta h}{2U_0^2 d^2} \approx \frac{2\alpha^2}{l} \Delta h$$

тогда:

$$f = \frac{\Delta h}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta h}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \approx \frac{\Delta h}{\Delta \alpha} = \frac{l}{2\alpha^2}. \quad (5.21)$$

Таким образом, с ростом угла отклонения уменьшается расстояние до точки фокусировки, это является причиной того, что экраны электронно-лучевых трубок делают выпуклыми.

Весьма прост и распространен электростатический анализатор, в котором поле однородно, а частицы влетают в него под углом  $\pi/4$  (рис. 5.9). Из уравнений движения в однородном электрическом поле вытекает, что при угле  $45^\circ$  происходит фокусировка ионов, имеющих разброс по углам влета. Координата щели, за которой располагают детектор, для ионов заряда  $q$  с энергией  $W$  в случае влета под углом  $45^\circ$  равна:

$$x_{\text{щ}} = 2Wd/Uq. \quad (5.22)$$

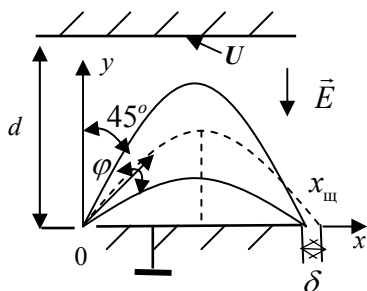


Рис. 5.9. Электростатический анализатор ионов с однородным полем

Ширина щели, пропускающей все ионы пучка, имеющего угловой разброс  $\varphi$  равна:  $\delta = x_{\text{щ}} (1 - \cos \varphi)$ . Такого типа анализатор удобен при необходимости одновременной регистрации ионов с разными начальными энергиями, или с разными зарядами  $q = Ze$ , тогда детекторы заряженных частиц располагают за щелями в за-

земленной обкладке на расстоянии от точки влета в зависимости от значения  $W/Z$  в соответствии с (5.22).

Хорошую фокусировку позволяет получить *цилиндрический конденсатор* (рис. 5.10). Электрическое поле цилиндрического

конденсатора обратно пропорционально радиусу  $E(r) = a/r$ , интегрируя уравнение  $dU(r)/dr = a/r$ , можно найти коэффициент  $a = (U_1 - U_2)/\ln(r_2/r_1)$ , а значит  $E(r) = (U_1 - U_2)/(r \ln(r_2/r_1))$ , где  $U_1, U_2, r_1, r_2$  – потенциалы и радиусы внутреннего и внешнего цилиндра соответственно. Через узкую выходную щель будут «успешно» проходить только частицы имеющие круго-

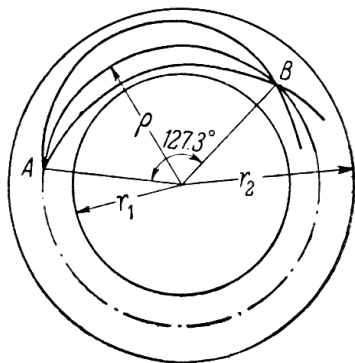


Рис. 5.10. Фокусировка в цилиндрическом конденсаторе

вые траектории и скорости, удовлетворяющие условию:  $mv^2/r = |qE|$ , где  $q$  – заряд частиц (остальные попадут на стенки цилиндра), т. е. частицы, имеющие кинетическую энергию:

$$U_0[\text{эВ}] = q(U_2 - U_1)/(2\ln(r_2/r_1)). \quad (5.23)$$

Для решения уравнения движения для некруговых траекторий в полярных координатах:

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{qa}{mr} \text{ с учетом}$$

постоянства секторальной скорости  $r^2\dot{\phi} = \text{const}$  удобно рассмотреть отклонение  $u$  траектории от круговой:  $r = r_0 + u$  ( $u \ll r$ ), где  $r_0$  – радиус, на котором пучок частиц влетает в конденсатор. Тогда уравнение движения можно представить в виде:  $\ddot{u} + 2\omega_0^2 u = 0$ , где  $\omega_0^2 = (qa)/(mr_0^2)$ , решение которого представляет собой колебания около круговой траектории с периодом  $2\pi/\sqrt{2}$ , то есть после поворота на угол  $\pi/\sqrt{2} = 127.3^\circ$  пучок фокусируется на круговой траектории (фокусировка по Юзу и Рожанскому).

Отметим, что в данном случае частицы фокусируются лишь в радиальном направлении, применяя обкладки анализатора специального профиля (параболические или сферические) можно обеспечить фокусировку частиц, выходящих из некого источника за пределами поля анализатора, в двух направлениях.

## Магнитные масс-сепараторы и энергоанализаторы

Благодаря зависимости радиуса вращения в магнитном поле

$$r_{\text{ларм}} = \frac{v_{\perp} mc}{eB} \quad (\text{ларморовского радиуса})$$

от поперечной скорости  $v_{\perp}$  и

массы  $m$  заряженной частицы, возможно их разделение (сепарация) по энергиям и массам, а также фокусировка как в поперечном, так и в продольном магнитном поле. В поперечном однородном магнитном поле выходящий из точечного источника  $A$  (рис. 5.11) перпендикулярно силовым линиям пучок моноэнергетических частиц будет фокусироваться после полуоборота на расстоянии  $2r_{\text{ларм}}$ . Фокусировка частиц, вылетевших под одинаковым

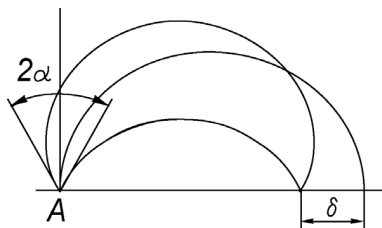


Рис. 5.11. Фокусировка в однородном магнитном поле

углом  $\alpha$  к центральной траектории пучка, происходит благодаря тому, что круговые траектории частиц имеют одинаковые радиусы, и их траектории опираются на диаметры, расположенные под тем же углом  $2\alpha$ , что и касательные к траекториям в начальной точке. Ширина щели  $\delta$ , необходимая для прохождения всего пучка, зависит от расходимости  $2\alpha$  входящего пучка:  $\delta = 2r_{\text{ларм}}(1 - \cos\alpha)$ . Для достаточно малого  $\alpha$  ошибка фокусировки  $\delta \approx r_{\text{ларм}}\alpha^2$ . Эта ошибка называется *сферической aberrацией*. Такого рода фокусировка (масс-спектрометр Демпстера) используется в течеискателях для увеличения их чувствительности и в случаях, когда для анализа ионов можно использовать собственное магнитное поле плазменной установки.

Для формирования мономассовых пучков ионов с помощью масс-монохроматоров, а также при анализе потоков заряженных частиц по массам (импульсам) для различных диагностических задач в плазменных исследованиях используются секторные электромагниты (рис. 5.12). Ионно-оптические свойства секторного магнитного поля в самом общем виде аналитически могут быть найдены путем разложения траектории по малым параметрам, в качестве которых выступают углы расходимости пучка, его отклонение от центральной траектории.

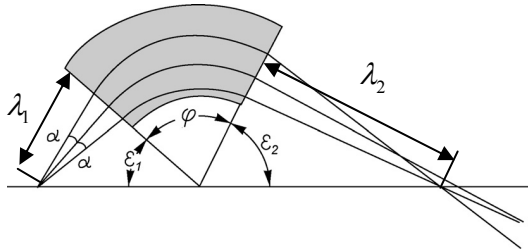


Рис. 5.12. Секторный магнитный масс-спектрометр

Для фокусировки первого порядка (т.е. когда пренебрегают квадратичными и более высокими по  $\alpha$  членами) в радиальной плоскости при ортогональных пучку границах магнитного поля справедливо следующее соотношение между углом поворота траектории  $\varphi$ , входным и выходным плечами  $\lambda_1\lambda_2$ :

$$\frac{tg\omega\varphi}{\omega} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\omega^2\lambda_1\lambda_2 - 1} \quad (5.24)$$

Здесь  $\omega^2 = I + A_I$ ,  $A_I$  – коэффициент в разложении магнитного поля в зазоре по малому параметру  $\eta = (r - r_0)/r_0$

$$B = B_0(1 + A_1\eta + A_2\eta^2 + \dots),$$

где  $B_0$  – значение поля на центральной траектории  $r_0$ . Таким образом, для однородного поля  $\omega=1$ . В этом случае условие фокусировки (5.24) имеет простую геометрическую интерпретацию: точка фокуса лежит на прямой, соединяющей источник и вершину секторного поля, т.е. на рис. 5.12  $\varepsilon_1 + \varphi + \varepsilon_2 = 180^\circ$ .

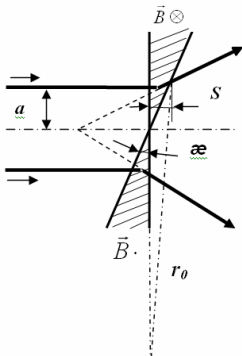


Рис.5.13. Поворот ионной траектории при наклонном входе в магнитное поле

Изменение угла влета частиц в поле эквивалентно добавлению тонкой линзы с полем противоположной направленности в областях выше и ниже центральной траектории (рис.5.13).

Как следует из рис. 5.13, фокусное



расстояние такой «линзы»  $f = -r_0/tg \alpha$ , так как поворот основной траектории происходит на угол  $\sim S/r_0$ , а  $S = a \cdot tg \alpha$ . Таким образом, меняя углы входа частиц при входе и выходе из секторного поля, можно менять и соответствующие плечи спектрометра. Условие фокусировки (5.24) при этом соответственно усложняется за счет добавления углов наклона входной  $\alpha_1$  и выходной  $\alpha_2$  границы поля:

$$\frac{tg \omega \varphi}{\omega} = \frac{\lambda_1 [1 - \lambda_2 ctg \alpha_2] + \lambda_2 [1 + \lambda_1 ctg \alpha_1]}{\omega^2 \lambda_1 \lambda_2 - [1 + \lambda_1 ctg \alpha_1][1 + \lambda_2 ctg \alpha_2]} \quad (5.25)$$

Повышение светосилы масс-сепараторов и спектрометров достигается фокусировкой пучка как в радиальном направлении, так и в направлении ему перпендикулярном (двойная фокусировка по направлениям). Анализ движения частиц в неоднородном аксиально-симметричном магнитном поле показывает, что двойная фокусировка по направлениям может иметь место в случае, когда поле в зазоре электромагнита спадает  $\propto 1/\sqrt{r}$ . Упомянутый выше метод разложения траектории по малым параметрам позволяет также анализировать фокусирующие свойства аксиально-симметричных электростатических полей, а также их комбинаций с магнитными полями.

Простейшим примером комбинации электрического и магнитного полей является *фильтр Вина*. В перпендикулярных электростатическом и магнитном полях равенство противоположно направленных электрической силы и силы Лоренца  $e\vec{E} = (q/c)[\vec{v}\vec{B}]$  обеспечивают прохождение ионов с определенной скоростью. Меняя разность потенциалов на обкладках, осуществляют селекцию по скоростям.

В продольном однородном магнитном поле фокусировка происходит в силу того, что вышедшие из одной точки частицы после совершения одного оборота по ларморовской окружности возвращаются на исходную силовую линию магнитного поля (рис. 5.14). Проекция движения частиц на перпендикулярную к силовым линиям плоскость представляет собой пучок окружностей, имеющих общую точку. Если угол расходимости пучка  $\alpha$  невелик, то фокусировка моноэнергетического пучка произойдет через один оборот на расстоянии  $l = \tau_{\text{ларм}} v \cos \alpha \approx 2\pi M v c / (qB)$ , где  $\tau_{\text{ларм}} = 2\pi M c / (qB)$  – период вращения по ларморовской окружности.

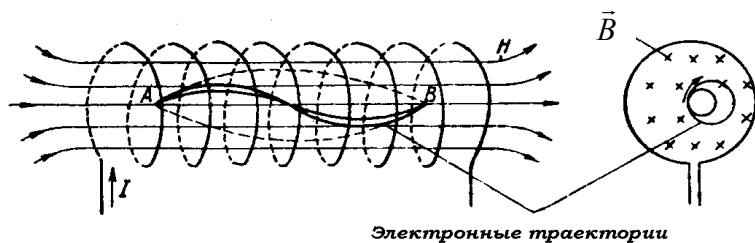


Рис. 5.14. Фокусировка в однородном продольном магнитном поле

Таким образом, расстояние до места фокусировки пучка зависит от скорости и массы частиц, и продольное однородное магнитное поле может быть использовано для энерго- и масс-сепарации частиц.

Дисперсионные возможности спектрометров и анализаторов характеризуются их *разрешающей способностью* по какому-то исследуемому параметру (энергии  $W$ , массе  $M$ , импульсу  $P$ , скорости  $v$ ). Дисперсия по массам  $D_M$  в секторном спектрометре с однородным магнитным полем:

$$D_M = r_0 \frac{\Delta M}{M}, \quad (5.26)$$

где  $r_0$  – радиус центральной ионной траектории.

*Разрешение анализатора*, например, по массе,

$$\rho_M = \frac{\Delta M}{M},$$

разрешение по энергии соответственно

$$\rho_E = \frac{\Delta E}{E}$$

Обратные разрешению величины называются *разрешающей способностью*. Например, разрешающая способность по энергии

$$R_E = \frac{E}{\Delta E}$$

К уширению изображения приводят различные аберрации. Кроме сферических аберраций, пропорциональных квадрату угла полураствора анализируемого пучка  $\alpha$  (рис.5.11, 5.12) на ширину линии в точке фокуса масс- спектрометров влияет *хроматическая аберрация*, связанная с немонотонностью пучка анализируе-

мых ионов. К этому приводит разброс по энергиям в извлекаемом из ионного источника пучке частиц или пульсации ускоряющего ионы напряжения. Действительно, если в источнике ионы ускоряются потенциалом  $U_0$ , так что их энергия  $Mv^2/2 = qU_0$ , то из выражения для ларморовского радиуса (2.7) для иона, движущегося по центральной траектории  $r_0$ , имеем

$$\frac{M}{q} = \frac{r_0^2 B^2}{2U_0 c^2},$$

откуда, дифференцируя по  $M$ , находим  $\Delta M/M = \Delta U_0/U_0$ .

Ионы соседних масс будут полностью разделены в анализаторе с шириной щели  $S_2$ , если сумма аббераций меньше этой ширины, а дисперсия больше, чем сумма  $S_2$  и изображения входной щели источника  $S_1$ . Это изображение может быть как увеличенным, так и уменьшенным, поэтому в общем случае разрешающая способность анализатора

$$R = \frac{D}{\Gamma \cdot S_1 + S_2}. \quad (5.27)$$

где  $D$  – дисперсия,  $\Gamma$  – увеличение ионно-оптической системы.

Для устранения сферической абберации, при анализе фокусирующих свойств полей методом разложения по малому параметру, в выражении для ширины изображения приравнивают нулю пропорциональные  $\alpha^2$  члены (фокусировка второго порядка), откуда находят квадратичную по  $\eta$  поправку к закону распределения поля в зазоре или к уравнению входных границ (криволинейные границы поля). Применение неоднородных полей может увеличить дисперсию. Например, для упомянутого выше магнитного поля, спадающего по радиусу  $B \propto r^{-1/2}$ , дисперсия вдвое больше, чем по (5.24), соответственно увеличивается и разрешающая способность анализатора.

### ***Электронные и ионные пушки***

В большинстве электронных пушек источником электронов служит термокатод (вольфрамовый, оксидный и т.п.) (рис. 5.15). Фокусировка пучка и управление его интенсивностью осуществляется управляющим (или фокусирующим) электродом. Анодом является диафрагма, между которой и катодом может прикладываться напряжение от единиц до сотен киловольт. На управляющий электрод подается отрицательное относительно катода напряжение до 500 В. Управление же положением уже

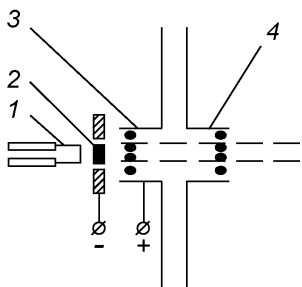


Рис. 5.15. Электронная пушка: 1 – нить накала, 2 – катод, подогреваемый нитью накала, 3 – управляющий электрод с сеткой, 4 – анод с сеткой

сформированного электронного пучка осуществляется с помощью отклоняющей системы, как это происходит в электронно-лучевых трубках телевизоров и мониторов.

Принцип работы ионной пушки подобен электронной. Существует большое множество разнообразных конструкций ионных пушек (ионных источников). В них используются различные способы создания ионов,

например, термоионная эмиссия, ионизация газа или паров вещества электронным ударом.

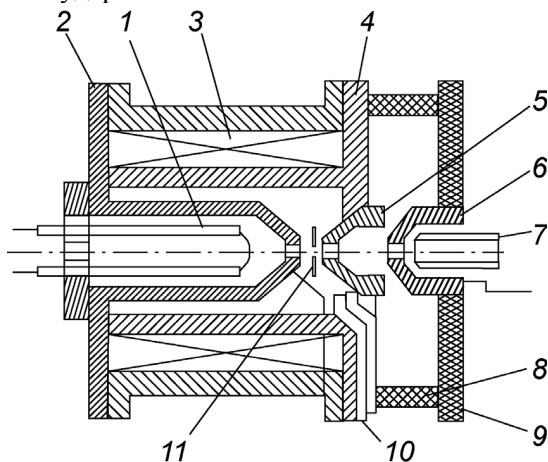


Рис. 5.16. Источник ионов типа дуоплазматрон: 1 – катод с накаливаемой нитью, 2 – промежуточный электрод, 3 – катушка для создания магнитного поля, 4 – анод, 5 – анодная вставка, 6 – вытягивающий электрод, 7 – электростатическая линза, 8 – изолятор, 9 – фланец вакуумной камеры, 10 – трубка для натекания газа, 11 – диафрагма

Наиболее эффективными источниками ионов являются плазменные, в которых создается газоразрядная плазма, а ионы вы-

тягиваются электрическим полем с ее границы. Примером может служить весьма распространенный источник ионов типа дуоплазматрон (рис. 5.16), в котором электрический разряд формируется между катодом и промежуточным анодом.

Коническая форма промежуточного анода приводит к сжатию плазмы в районе выходного отверстия. Неоднородное магнитное поле, создаваемое катушкой между промежуточным анодом и анодом, приводит к дополнительному сжатию плазменной струи. Диафрагма в месте наибольшего сжатия используется для повышения газовой экономичности источника за счет ограничения потока неионизованной компоненты рабочего вещества. Ионы вытягиваются из плазмы электродом, который стоит сразу после анода и на который подается отрицательный относительно анода потенциал. Диафрагма вытягивающего электрода является фокусирующей системой. Кроме того, граница плазмы, из которой вытягиваются ионы, является также электростатической линзой. Форма границы плазмы существенно влияет на расходимость формируемого в ионно-оптической системе ионного пучка. Меняя концентрацию плазмы (например, меняя ток разряда) при фиксированном ускоряющем напряжении, можно управлять формой плазменной границы. При большой концентрации плазмы граница выпуклая – пучок сильно расходится. Снижая концентрацию плазмы, можно создать плоскую границу, тогда расходимость может быть минимальной, а вытягиваемый из источника ток подчиняется закону «3/2» (см. §42). При дальнейшем уменьшении концентрации плазмы граница становится вогнутой, и расходимость пучка вновь возрастает. Расчет параметров фокусировки пучка с учетом границы плазмы является достаточно сложной задачей и возможен лишь численными методами.

### *Электронные микроскопы*

Преимущество электронного микроскопа перед оптическим заключается в его гораздо большей разрешающей способности. Разрешающая способность оптического микроскопа ограничена невозможностью снижения диффракции лучей путем уменьшения длины волны из-за ограниченного диапазона длин волн видимого света. В электронных микроскопах возможно уменьшать длину

волны де Бройля  $\lambda = h/(mv)$  до нескольких ангстрем путем использования ускоряющих электроны высоких напряжений (до нескольких десятков и даже сотен кэВ). Схемы электронных микроскопов с магнитной и электростатической фокусировкой представлены на рис. 5.17. Исследуемый объект просвечивается пучком монохроматических электронов. Первичное изображение объекта попадает в фокальную плоскость проекционной линзы, которая дает увеличенное изображение объекта на экране. Одним из существенных требований к электронному микроскопу является поддержание в области линз высокого вакуума (ниже  $10^{-4} \div 10^{-5}$  мм рт. ст.), так как при высоких напряжениях возможно возникновение электрического разряда, нарушающего необходимое распределение потенциала.

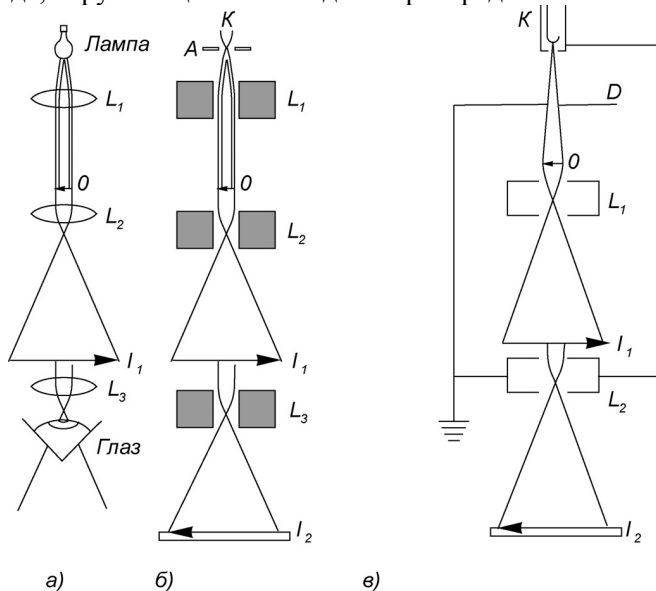


Рис. 5.17. Схемы оптического (а), магнитного (б) и электростатического (в) электронного микроскопа:  $K$  – источник электронов,  $O$  – объект,  $D$  – диафрагма,  $L_1, L_2, L_3$  – линзы,  $I_1, I_2$  – первичное и вторичное изображение,  $S$  – экран.

Разрешающая способность электронного микроскопа ограничивается прежде всего хроматической и сферической aberrациями. Монохроматичность электронного пучка нарушается из-за колебаний

ускоряющего напряжения и разброса энергий электронов, излучаемых накаливаемым катодом. В магнитном электронном микроскопе колебание силы тока в обмотке линз приводит к дополнительному размытию изображения. Кроме просвечивающих электронных микроскопов широкое распространение получили сканирующие электронные микроскопы, в которых изображение формируется отраженными от исследуемого образца или вторичными электронами.

## ГЛАВА 6

### ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА ЭЛЕКТРОННЫХ И ИОННЫХ ПУЧКОВ

#### §42. Ограничение тока пространственным зарядом в диоде

В промежутке длиной  $d$  между плоскими катодом и анодом распределение потенциала в вакууме линейно:  $U(x)=U(a)\frac{x}{d}$  (это распределение является решением уравнения Лапласа  $\Delta U = 0$ ). По мере увеличения плотности тока объемный заряд  $\rho(x)$  в промежутке растет, изменяя распределение потенциала и приводя к

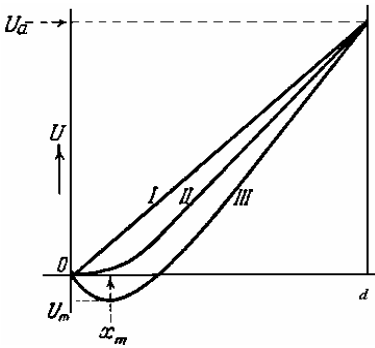


Рис. 6.1. Распределение потенциала в плоском диоде без влияния пространственного заряда (I), в режиме ограничения тока объемным зарядом (II) и в режиме возникновения виртуального катода (III)

возникновению вблизи поверхности катода потенциального барьера — «виртуального катода», от которого электроны отражаются обратно на катод (рис. 6.1). Для определения распределения потенциала в промежутке необходимо решать уравнение Пуассона  $\Delta U = -4\pi\rho(x)$  с учетом того, что плотность тока в промежутке  $j = -\rho v$ . Если считать, что электроны эмитируются с катода с нулевой скоростью (тепловая энергия эмиссионных электронов много меньше энергии, приобретаемой в промежутке), то устойчивым

является режим, когда «виртуальный катод» не образуется, а электрическое поле на поверхности катода равно нулю:

$$E = \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = 0.$$

При таком граничном условии в режиме ограничения тока объемным зарядом решением уравнения Пуассона



$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{4\pi j}{\sqrt{2e/m} \sqrt{U}} \quad (6.1)$$

(здесь учтено, что при начальной нулевой скорости энергия электронов  $mv^2/2 = eU$ ) является распределение потенциала в промежутке в виде:

$$U(x) = U(d) \left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}. \quad (6.2)$$

В этом случае плотность электронного тока, который можно пропустить через промежуток, ограничена величиной, зависящей от напряжения на аноде  $U_a$  и от расстояния между катодом и анодом  $d$ :

$$j_{3/2} [A/cm^2] = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m_e}} \frac{U_a^{3/2}}{d^2} = 2.33 \cdot 10^{-6} \frac{U_a^{3/2} [B]}{d^2 [cm]}. \quad (6.3)$$

Это соотношение получило название закона *Чайльда-Ленгмюра*, или закона «3/2». Для ионного тока:

$$j_i [A/cm] = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{M_i}} \frac{U_a^{3/2}}{d^2} = 5.46 \frac{U_a^{3/2} [B]}{\sqrt{M_i [a.e.m.]} d^2 [cm]}. \quad (6.4)$$

Если учитывать начальную скорость эмитированных электронов  $v_0$ , то уравнение Пуассона примет вид:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{4\pi j}{v_0 \sqrt{1 + 2eU/(mv_0^2)}}, \quad (6.5)$$

решением которого является зависимость

$$U(x) = (mv_0^2/2e) \left( (x/x_m - 1)^{4/3} - 1 \right). \quad (6.6)$$

Около катода возникает «виртуальный катод» (потенциальный барьер) глубиной  $eU_m = \frac{mv_0^2}{2}$  на расстоянии  $x_m = \sqrt{\frac{mv_0^3}{18\pi e j}}$  от катода (рис.6.1).

Для цилиндрических диодов предельная плотность электронного тока зависит от напряжения на аноде в степени 3/2, но зависимость от расстояния между катодом и анодом носит более сложный характер (как результат решения уравнения Пуассона в цилиндрических координатах) и описывается специальной функцией Богуславского  $\beta\left(\frac{r_a}{r_k}\right)$ , где  $r_a$  и  $r_k$  – радиусы анода и катода соответственно:

$$j_{3/2} = \frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{U_a^{3/2}}{r_a^2 \beta^2\left(\frac{r_a}{r_k}\right)}. \quad (6.7)$$

Для приходящего на анод полного тока  $I_{3/2} = j_{3/2} S_a$  ( $S_a = 2\pi r_a l_a$  – площадь анода.):

$$I_{3/2}[A] = \frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{U_a^{3/2} S_a}{r_a^2 \beta^2\left(\frac{r_a}{r_k}\right)} = 2.33 \cdot 10^{-6} \frac{U_a^{3/2} [B] S_a [cm^2]}{r_a^2 [cm] \beta^2\left(\frac{r_a}{r_k}\right)} \quad (6.8)$$

– формула *Ленгмюра-Богуславского*. Значения функции Богуславского для широкого диапазона  $r_a/r_k$  можно найти в таблицах [29].

Распределение потенциала в промежутке описывается соотношением:

$$U(r) = U_a \left(\frac{r}{r_a}\right)^{3/2} \left(\frac{\beta^2(r/r_k)}{\beta^2(r_a/r_k)}\right)^{2/3}. \quad (6.9)$$

Для сферического диода полный ток на анод  $I_a$ :

$$I_a [A] = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{U_a^{3/2}}{\alpha^2 \left(\frac{r_k}{r_a}\right)} = 29.3 \cdot 10^{-6} \frac{U_a^{3/2} [B]}{\alpha^2 \left(\frac{r_k}{r_a}\right)}, \quad (6.10)$$

где  $\alpha(r_a/r_k)$  – табулированная функция Ленгмюра [30]. Распределение потенциала между катодом и анодом в этом случае:

$$U(r) = U(a) \left( \frac{\alpha(r_k/r)}{\alpha(r_k/r_a)} \right)^2. \quad (6.11)$$

### §43. Предельная плотность тока пучка частиц в пролетном промежутке в вакууме

Плотность тока заряженных частиц в пролетном промежутке между электродами с одинаковым потенциалом ограничена также из-за собственного объемного заряда и, соответственно, потенциала пучка. Рассмотрим эту задачу (*задачу Бурсиана*) на примере потока в пролетном промежутке длины  $d$  ионов массы  $M$ , ускоренных до этого в плоском диоде потенциалом  $U_0$  (рис. 6.2). Распределение потенциала в промежутке задается уравнением Пуассона:

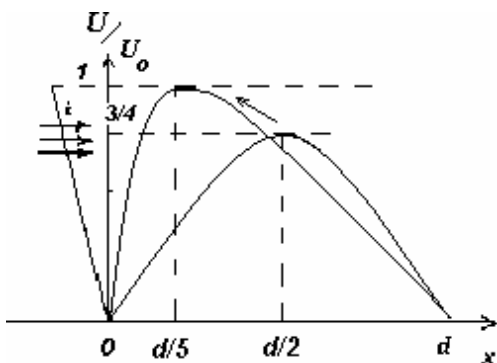


Рис. 6.2. Распределение потенциала в пролетном промежутке

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = - \frac{4\pi j \sqrt{M/2e}}{\sqrt{U_0 - U}}. \quad (6.12)$$

Устойчивое решение этого уравнения при граничных условиях  $U(0) = U(d) = 0$  существует только при дополнительном граничном условии на поле [31]:

$$E|_0 = d\psi/d\xi|_0 < \sqrt{2}, \quad (6.13)$$

где  $\psi = U/U_0$ ,  $\xi = x/r_d$ ,  $r_d = \sqrt{Mv_0^2 / (4\pi e^2)}$  - *дебаевский радиус пучка*. Это условие соответствует условию на максимальную длину пролетного промежутка:

$$d < (4\sqrt{2}/3)r_d = d_{\max}. \quad (6.14).$$

Значение  $d_{\max}$  соответствует критическому значению максимума потенциала:

$$U_{\max} = (3/4)U_0. \quad (6.15)$$

При возрастании плотности ионного тока потенциал в пролетном промежутке будет возрастать до  $U_{\max}$ , затем скачком возникает «виртуальный анод» с  $U_{\max} = U_0$ , от которого произойдет отражение части ионов (ионы имеют распределение по энергиям) обратно в сторону источника, в результате чего ток на коллектор уменьшится в 4.5 раза. Таким образом, ток в пролетном промежутке ограничен током Бурсиана:

$$j_B = \frac{8}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{M}} \frac{U_0^{3/2}}{d^2} = 8j_{3/2}. \quad (6.16)$$

Механизм этой *неустойчивости Бурсиана* связан с положительной обратной связью между частицами пучка и внешней электрической цепью, когда повышение потенциала пучка на малую величину автоматически вызывает дальнейшее его повышение. Эта связь возникает, когда дебаевский радиус пучка становится меньше расстояния между электродами. Точно такое же ограничение существует и для потока электронов в вакууме. Даже в случае *скомпенсированного пучка* электронов, когда пространственный заряд элек-

тронов в пролетном промежутке скомпенсирован ионами (*задача Пирса*), возникает ограничение на максимально возможную плотность тока из-за неустойчивости, также приводящей к образованию виртуального катода и запариванию пучка. Физическая причина в данном случае *пирсовской* неустойчивости та же, что и неустойчивости Бурсиана, – положительная обратная связь электронов пучка с электронами внешней электрической цепи, которая возникает, если дебаевский радиус пучка становится меньше расстояния между электродами. Качественно эти неустойчивости сродни пучковой неустойчивости, при которой энергия направленного движения передается в энергию плазменных колебаний (см. §37). Условием устойчивости на длину пролетного промежутка в случае скомпенсированного потока является  $d < \pi r_d$ , а предельная плотность тока (ток Пирса) равна:

$$j_{\Pi} = \frac{\pi}{4(1 + (m/M)^{1/3})} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{U_0^{3/2}}{d^2} \approx \frac{9\pi^2}{4} j_{3/2}. \quad (6.17)$$

### ***Расхождение пучков заряженных частиц под действием собственного объемного заряда***

Основной проблемой транспортировки интенсивных пучков заряженных частиц является их расхождение под действием собственного объемного заряда. Для отыскания формы пучка необходимо решать уравнение Пуассона (для ленточного пучка двумерное):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\rho(x, z), \quad (6.18)$$

а также уравнение движения для граничной заряженной частицы. В случае бесконечного ленточного пучка (рис.6.3), у которого ширина значительно больше толщи-

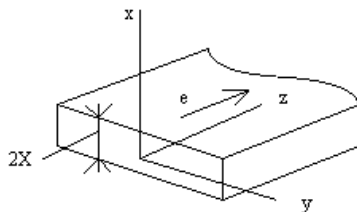


Рис. 6.3. Плоский электронный ленточный пучок

ны  $2X$ , для определения электрического поля на границе вместо уравнения Пуассона можно использовать теорему Гаусса о равенстве потока электрического поля через поверхность и заряда, заключенного в объеме, ограниченном этой поверхностью. Тогда напряженность электрического поля на границе:

$$E_x = J/(2\varepsilon_0 v) = J/(2\varepsilon_0 \sqrt{2eU_0/m}), \quad (6.19)$$

где  $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  Кл/(В·м)

– диэлектрическая постоянная вакуума,  $J$  – линейная плотность тока (ток на единицу ширины бесконечного ленточного пучка),  $U_0$  – потенциал, которым был ускорен пучок до входа в пролетный промежуток. Решая

уравнение движения  $m\ddot{x} = eE_x$ , получим профиль границы пучка, которая описывается зависимостью  $x(z)$ :

$$x = x_0 - \operatorname{tg} \gamma \cdot z + pz^2/2, \quad (6.20)$$

где  $p = \frac{J}{4\varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m} U_0^{3/2}}}$ ,  $\gamma$  - угол сходимости пучка на входе, т. е.

угол между направлением скорости граничного электрона и направлением распространения пучка по оси  $z$ . Местоположение самого узкого в поперечном размере участка пучка, так называемого «кроссовера»  $z_{\text{кросс}}$ , определяется из условия:

$$dx/dz = 0, \text{ т.е. } z_{\text{кросс}} = \operatorname{tg} \gamma / p. \quad (6.21)$$

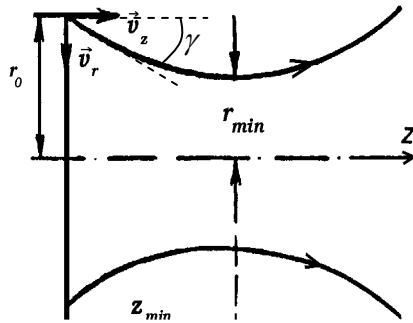


Рис. 6.4. Расходимость цилиндрического электронного пучка под действием собственного объемного заряда

Для цилиндрического пучка, влетающего в пролетный участок параллельно оси  $z$  с начальным радиусом  $r_0$ , зависимость радиуса пучка  $r(z)$  задается соотношением:

$$\frac{z}{r_0} = 4 \sqrt{\frac{e}{2m}} \frac{U_0^{3/4}}{I^{1/2}} \int_1^R \frac{d\zeta}{\sqrt{\ln \zeta}} = 32.3 \frac{U_0^{3/4} [\kappa B]}{I^{1/2} [MA]} \int_1^R \frac{d\zeta}{\sqrt{\ln \zeta}}, \quad (6.22)$$

где  $I$  – полный ток пучка, ускоренного потенциалом  $U_0$ ,  $R=r/r_0$  (числовой коэффициент дан для электронного пучка). Для сходящегося пучка, входящего в пролетный промежуток под углом  $\gamma$  к оси  $z$  (рис. 6.4):

$$\frac{z}{r_0} = \sqrt{\frac{2e}{m}} U_0 \int_1^R \frac{d\zeta}{\sqrt{\frac{8e}{mU_0} I \ln \zeta + \frac{2e}{m} U_0 \cdot \text{tg}^2 \gamma}}. \quad (6.23)$$

Радиус пучка в наиболее узком месте (*в кроссовере*) определяется из соотношения:

$$\ln \frac{r_0}{r_{\min}} = \frac{U_0^{3/2}}{I} \sqrt{\frac{e}{2m}} \text{tg}^2 \gamma \approx 1.04 \cdot 10^3 \frac{U_0^{3/2} [\kappa B]}{I [MA]} \text{tg}^2 \gamma, \quad (6.24)$$

где численный коэффициент дан для электронного пучка. Для нахождения положения кроссовера нужно в (6.23) взять  $R = r_{\min} / r_0$ . При выводе этих соотношений не была учтена сила Лоренца, действующая на движущуюся заряженную частицу в магнитном поле. Эта фокусирующая сила в собственном магнитном поле тока пучка будет существенна только при достаточно больших скоростях частиц, так как отношение силы Лоренца к электрической силе расталкивания равно отношению квадратов скорости электронов и скорости света.

Расхождение пучков ограниченных поперечных размеров следует учитывать не только в пролетных промежутках, но и в электронных или ионных пушках. Пирсом было показано, что можно подобрать форму окаймляющих пучок промежуточных

электродов так, чтобы компенсировать расталкивающее действие объемного заряда пучка и сохранить прямолинейность его распространения (пушки Пирса). Для этого необходимо, чтобы для потенциала в пространстве вне пучка, удовлетворяющего в случае плоской геометрии уравнению Лапласа:  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$ , на границе пучка выполнялось условие  $\partial U / \partial x = 0$  (рис.6.3).

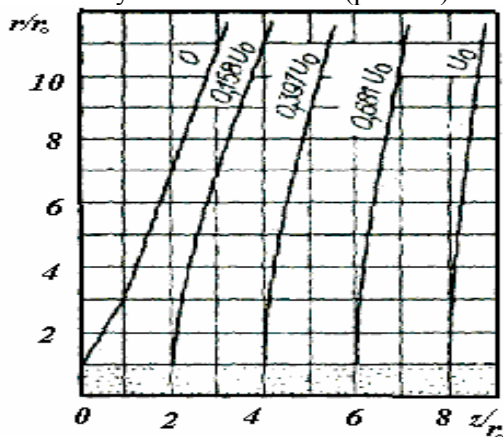


Рис. 6.5. Геометрия эквипотенциалей в пушке Пирса, формирующей параллельный пучок

Решение уравнение Лапласа с учетом этого условия и зависимости потенциала на оси  $U(z) = U(d) \left(\frac{z}{d}\right)^{4/3}$  позволяет определить требуемую геометрию электродов, которая для плоского случая задается уравнением:

$$(x^2 + z^2)^{2/3} \cos\left(\frac{4}{3} \arctg(x/z)\right) = U(d). \quad (6.25)$$

Угол наклона плоскости катода ( $U = 0$ ) к направлению распространения пучка  $\arctg(x/z) = 3\pi/8 = 67.5^\circ$ . В случае цилиндрической геометрии численный расчет показывает, что угол наклона электрода, прилегающего к катоду, также составляет  $67.5^\circ$  (рис. 6.5).



## ГЛАВА 7

### ЭМИССИОННАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

Большинство плазменных установок представляют собой газоразрядные устройства. Возникновение разрядов в системах с электродами сопряжено не только с обменом зарядами между твердым телом и плазмой, но и без эмиссии электронов с поверхности вообще невозможно. Кроме того, эмиссионные явления широко используются в различных приборах для диагностики плазмы. В данной главе кратко будут рассмотрены основные существенные в исследованиях и применениях плазмы виды эмиссии электронов из поверхности твердых тел.

#### §44. Термоэлектронная эмиссия

##### *Электроны в металлах*

«Электронный газ» в металлах представляет собой электроны зоны проводимости, возникшие как обобщенные валентные электроны атомов при сближении атомов на расстояния, когда перекрываются электронные облака отдельных атомов. Сплошная зона проводимости возникает из-за расщепления энергетических уровней электронов отдельных атомов в силу запрета нахождения электронов в одинаковом квантовом состоянии. Так как число атомов велико, то расщепленные уровни электронов образуют непрерывную энергетическую полосу, называемую зоной проводимости, в которой электроны можно считать свободными, т.е. не привязанными к какому-либо атому. С другой стороны, оставшиеся без электрона атомы, т.е. ионы играют роль нейтрализующего электроны фона, так что электронный газ и ионы кристаллической решетки можно считать плазмой. Однако расстояние между ионами:

$$\frac{1}{n^{1/3}} \approx \frac{1}{(10^{27})^{1/3}} = 10^{-9} \text{ м}$$

становится меньше длины волны де Бройля электрона:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_e} \approx \frac{6.6 \cdot 10^{-34} [\text{Дж} \cdot \text{с}]}{m_e \sqrt{\frac{kT}{m_e}}} \approx 10^{-9} \text{ м}, \quad (h - \text{постоянная Планка}).$$

Следовательно, электрон нельзя считать частицей, т.е. плазма становится квантово вырожденной, подчиняющейся уже не классической статистике Максвелла-Больцмана, а статистике Ферми-Дирака. При этом электрон необходимо описывать волновой функцией, имеющей смысл плотности вероятности нахождения электрона в данной точке в данный момент времени:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_k(\vec{r}) \cdot \varphi(t) = \frac{1}{V} \exp(i\vec{k}\vec{r}) \exp(-i\omega t), \quad (7.1)$$

где  $k = \frac{2\pi}{L}$  - волновой вектор,  $V = L^3$  - объем металла,  $\omega$  - частота волны. Энергия электрона в состоянии  $\psi_k$ :

$$E_k = \frac{p_k^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}.$$

Функция распределения Ферми-Дирака, т.е. число частиц в одном состоянии:

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)} \quad (7.2)$$

(рис. 7.1). Импульс электрона можно выразить через квантовое число  $\vec{s}$ :  $\vec{p} = \frac{h}{L} \vec{s}$ , так что компоненты импульса

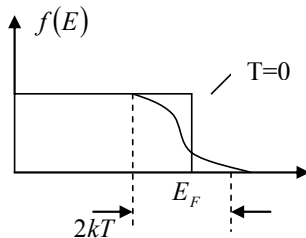


Рис.7.1. Распределение Ферми-Дирака

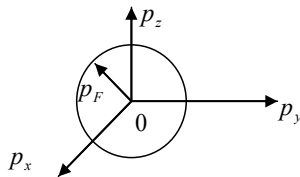


Рис.7.2. Сфера Ферми в импульсном пространстве.

$p_x = \frac{h}{L} s_x, p_y = \frac{h}{L} s_y, p_z = \frac{h}{L} s_z$  где  $s_x, s_y, s_z$  целые положительные и отрицательные числа. Элементарный кубик в импульсном пространстве имеет объем  $\frac{h^3}{L^3}$ , поэтому число возможных квантовых

состояний в объеме  $dp_x dp_y dp_z$  равно  $\frac{L^3}{h^3} dp_x dp_y dp_z$ . При  $T = 0$  все электроны находятся внутри так называемой сферы Ферми (рис. 7.2). Если учесть принцип Паули и две возможные ориентации спина, то число состояний в сфере Ферми:  $2 \left( \frac{L^3}{h^3} \right) \cdot \frac{4}{3} \pi p_F^3 = N$ ,

следовательно  $p_F = h \left( \frac{3n_0}{8\pi} \right)^{1/3}$ , где  $n_0 = \frac{N}{V}$ . Тогда энергия Ферми равна:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e} \cdot \left( \frac{3n_0}{8\pi} \right)^{2/3} = \frac{h^2}{2m_e} (3\pi^2 n_0)^{2/3}. \quad (7.3)$$

Энергия Ферми не зависит от объема металла, а зависит от концентрации свободных электронов. На первый взгляд странный вывод. При росте  $V$  число  $N$  растет, казалось бы, должно расти число уровней и верхний уровень  $E_F$  должен повышаться, но  $E_F$  не зависит от общего числа уровней. Это связано с тем, что уменьша-

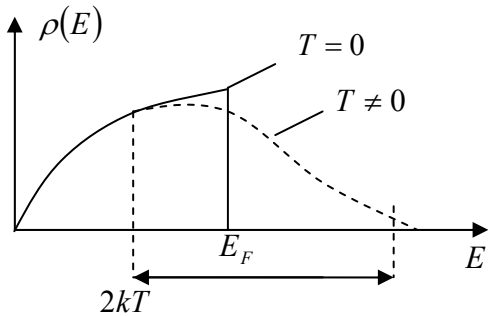


Рис. 7.3. Функция распределения электронов по энергии

ется расстояние между уровнями  $\Delta E = \frac{E_F}{N/2}$  (с учетом спина), и зона проводимости при  $N \rightarrow \infty$  становится сплошной. Число час-

тиц с энергией меньше  $E$  определим из соотношения

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{2/3}, \text{ следовательно:}$$

$$n(E) = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{2m_e E}{\hbar^2} \right)^{3/2}, \quad (7.4)$$

тогда плотность частиц (число частиц, имеющих энергию от  $E$  до  $E + dE$ )  $dn = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} dE$ . С учетом распределения Ферми-Дирака функция распределения электронов в металле имеет вид:

$$\rho(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{E^{1/2} dE}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}. \quad (7.5)$$

### ***Плотность термоэмиссионного тока***

Испускание электронов нагретыми проводящими материалами называется *термоэлектронной эмиссией*. Это явление было обнаружено в 1883 г. Эдисоном. Аналитический расчет плотности термоэмиссионного тока можно получить исходя из модели Зоммерфельда о нахождении электронов в металле как в потенциальной яме. При абсолютном нуле температуры энергия электронов металла не может быть больше энергии Ферми, поэтому ни один электрон не может выйти из металла, а функция распределения обрывается при  $E = E_F$  (рис. 7.3). При  $T > 0$  обрыв сглаживается, появляется «хвост» функции распределения электронов с энергиями больше  $E_F$ , именно у этих электронов, количество которых экспоненциально растет с ростом температуры поверхности, появляется ненулевая вероятность преодоления потенциального барьера на границе металла. Поэтому термоэмиссионный ток заметен только для нагретых тел. Его величина рассчитывается интегрированием функции распределения по нормальной составляющей к поверхности энергии  $W_x$  в пределах интегрирования от  $W_a$  до  $\infty$ , где  $W_a$  -

высота потенциального барьера. С учетом вероятности преодоления потенциального барьера, а также с учетом того, что для термоэлектронов  $W_x - E_F \gg k_B T$ , плотность термоэмиссионного тока может быть представлена формулой Ричардсона-Дэшмана:

$$j_T = AT^2 \exp\left(-\frac{e\varphi_a}{k_B T}\right), \quad (7.6)$$

где  $\varphi_a = W_a - E_F$  – работа выхода электрона из материала катода, равная наименьшей энергии, которую нужно сообщить электронам для их эмиссии,  $k_B$  – постоянная Больцмана. Величину  $A = A_0 D$ , учитывающую прозрачность барьера между металлом и вакуумом  $D = (1 - \bar{r})$ ,  $\bar{r}$  – коэффициент отражения электронов от барьера, усредненный по энергиям электронов, иногда называют «постоянной Ричардсона», где

$$A_0 \left[ \frac{A}{\text{см}^2 \text{K}^2} \right] = \frac{4\pi m e k_B^2}{h^3} = 120.4 \quad (7.7)$$

универсальная термоэлектронная константа, называемая *постоянной Зоммерфельда*. Следует учесть, что работа выхода зависит от температуры (вследствие теплового расширения), обычно эта зависимость линейная:

$$\varphi_a = \varphi_0(T_0) + \alpha(T - T_0), \quad (7.8)$$

$\alpha = d\varphi/dT|_{T=T_0} = 10^{-5} \div 10^{-4}$  эВ/град – температурный коэффициент, который может быть для разных металлов как положительным, так и отрицательным. Значение постоянной Ричардсона  $A$  для разных металлов изменяются от 15 до 350 А/(см<sup>2</sup>·К<sup>2</sup>). Экспериментальное определение работы выхода  $\varphi_a$  и «постоянной» Ричардсона  $A$  можно провести по методу «прямой Ричардсона», полагая вблизи некоторой температуры  $T_0$  линейное изменение  $\varphi_a(T)$  (7.8) и строя по экспериментальным данным зависимость  $\ln(j_T/T^2)$  от  $1/T$ . По тангенсу угла наклона полученной прямой определяют работу выхода  $\varphi_a$ , а точка пересечения прямой с осью ординат дает значение  $\ln(A)$

Зависимость (7.6) для плотности термоэмиссионного тока можно получить, если рассматривать термоэмиссионный ток как поток электронов в вакуум, имеющих распределение Больцмана в потенциальном поле и преодолевающих потенциальный барьер  $e\varphi_a$  (термодинамический вывод):

$$j_T = en_e v_{cp} / 4, \tag{7.9}$$

где

$$n_e = 2 \left( \frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{e\varphi_a}{k_B T}\right) \tag{7.10}$$

– плотность невырожденного электронного газа,

$v_{cp} = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}$  – средняя термодинамическая скорость.

При отсутствии (или пренебрежимо малой) напряженности ускоряющего электроны внешнего электрического поля эмитированные электроны создают около поверхности отрицательный пространственный заряд, ограничивающий ток термоэмиссии. Поэтому, в случае малых напряжений между катодом и анодом термоэмиссионный ток можно приравнять плотности тока  $j_{3/2}$ , тогда зависимость плотности тока  $j_T$  от напряжения на аноде  $j_T \propto U_a^{3/2}$ . При дальнейшем увеличении  $U_a$  объемный заряд у катода исчезает и, казалось бы, ток должен выйти на насыщение, при котором все эмитированные электроны уходят на анод. Однако, как показали эксперименты, при дальнейшем увеличении  $U_a$  так, при напряженностях поля  $\sim 10^4$  В/см, ток эмиссии продолжает медленно расти ( $\propto \exp(E^{1/2})$ ). Рост электронного тока эмиссии под действием внешнего электри-

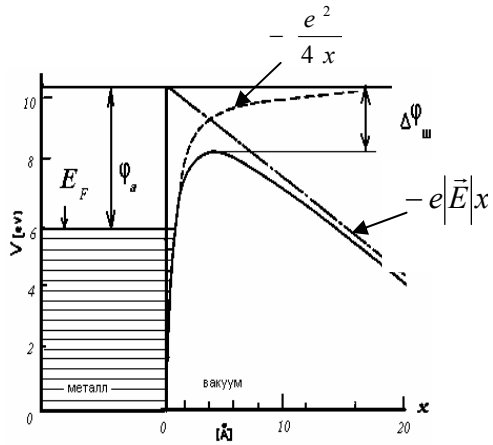


Рис. 7.4. Потенциальный барьер на границе металл – вакуум

ческого поля  $\sim 10^4$  В/см, ток эмиссии продолжает медленно расти ( $\propto \exp(E^{1/2})$ ). Рост электронного тока эмиссии под действием внешнего электри-

ческого поля вследствие уменьшения работы выхода электрона из твердого тела из-за понижения в поле потенциального барьера (рис. 7.4)

$$\varphi_E = \varphi_a - \Delta\varphi_u \quad (7.11)$$

называется *эффектом Шоттки*. Потенциальную энергию электрона на расстоянии  $x$  от поверхности металла с учетом сил зеркального отображения заряда и внешнего электрического поля  $E$  можно описать в виде (см. рис.7.4):

$$eU(x) = E_F + e\varphi_a - \frac{e^2}{4x} - eEx \quad (7.12)$$

Снижение работы выхода можно оценить из соотношения (7.12) на вершине потенциального холма, положение которого соответствует координате:

$$x_m = \sqrt{e / 4E} , \quad (7.13)$$

а потенциальная энергия в максимуме

$$eU_m = E_F + e\varphi_a - e^{3/2}E^{1/2}. \quad (7.14)$$

Снижение работы выхода за счет эффекта Шоттки:

$$e\Delta\varphi_{ш}[\text{эВ}] = e^{3/2}E^{1/2} = 3.79 \cdot 10^{-4} E^{1/2} [\text{В/см}]. \quad (7.15)$$

Плотность термоэмиссионного тока с учетом эффекта Шоттки:

$$j_{ТШ} = j_T \cdot \exp(e^{3/2}E^{1/2}/k_B T) = j_T \cdot \exp(4.39E^{1/2}[\text{В/см}]/T[\text{К}]). \quad (7.16)$$

### ***Влияние поверхностной неоднородности материала катода на термоэмиссию***

Тугоплавкие металлы, использующиеся для термокатодов, такие, как вольфрам, тантал, молибден, имеют объемно-центрированную кубическую (ОЦК) решетку (рис.7.5).

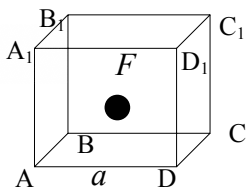


Рис. 7.5. Схема ОЦК

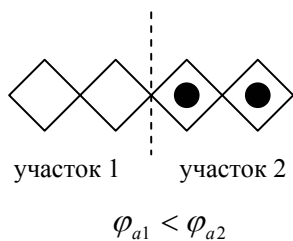


Рис. 7.6. Участки неоднородной поверхности

Плотность атомов в разных гранях различная, она определяется расстоянием между атомами. Например, расстояние между точками

$$AF = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ меньше, чем}$$

между  $AD = a$ .

Следовательно, плотность атомов в плоскости грани  $AA_1C_1C$  больше, чем в плоскости  $AA_1D_1D$ . Поверхность металла можно представить в виде зубцов различных граней кристалла, обращенных в вакуум. Если соседствуют участки с разной плотностью атомов, то такие участки обладают разной работой выхода электронов, т.к. уровень заполнения электронного облака проводимости зависит от концентрации ионов нейтрализующего фона. Например, на участке 2 (рис.7.6) с гранями, содержащими больше атомов, электроны будут ближе находиться к поверхности (чисто геометрически) по сравнению с участком 1 и тем самым будут в большей степени компенсировать положительные заряды зубцов, создающих вытягивающее поле. Другими словами, можно сказать, что электроны легче удерживаются в плоскости граней, содержащих большую концентрацию атомов, т.е на участке 2 работа выхода электронов будет больше, чем на участке 1. Тогда поверхность даже чистого поликристаллического металла можно рассматривать как пятнистую с областями, обладающими различной работой выхода. Работа выхода пятен соответствует работе выхода однородного массивного образца лишь при достаточных размерах этих пятен  $l > 10-20$  нм, при меньших размерах электронная структура меняется.



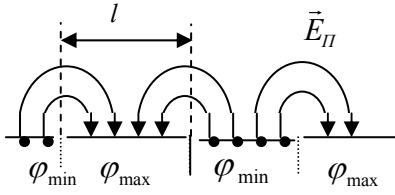


Рис. 7.7. Поверхность с неоднородной работой выхода

Возникающая между этими областями контактная разность потенциалов, создает над незаряженной металлической поверхностью электрическое поле. Это поле можно назвать *полем пятен*  $\vec{E}_{\Pi}$ . Оно направлено таким образом, что тормозит электроны, эмитированные пятнами с малой работой выхода и ускоряет электроны на участках с большой работой выхода. Т.о. коллективное действие плазмы металла стремится нивелировать возникающие неоднородности эмиссионной способности поверхности. При этом изменяется потенциальная энергия электронов:

$$eU = E_F + e\varphi_a - \frac{e^2}{4x} - eEx \pm eE_{\Pi}x_{\Pi}.$$

Таким образом, для эмиссии электронов с участков с  $\varphi_{\min}$  возникает дополнительный потенциальный барьер величиной

$$\Delta U = \int_0^{\infty} E_{\Pi} dx \quad (\text{рис.7.8}).$$

Надо учесть, что  $x_{\Pi} < x$  (область действия поля пятен меньше области действия внешнего электрического поля). На больших расстояниях внешнее электрическое поле «возьмет свое» и «загнет» ход кривой потенциальной энергии. Поэтому максимум все равно будет, так что дополнительный потенциальный барьер будет равен

$$\Delta U_1 = \int_0^{x_{kp}} (E_{\Pi} - E) dx,$$

где значение  $x_{kp}$  определяется из соотношения  $E_{\Pi}(x_{kp}) = E$ . При увеличении внешнего поля  $E$  дополнительный потенциальный барьер  $\Delta U_1$  уменьшается, и термоэмиссионный ток резко возрастает. Этот эффект получил название *аномального эффекта Шоттки*. Это аномальное увеличение тока прекратится, как только барьер исчезнет т.е.  $E_{\Pi} = E$ .

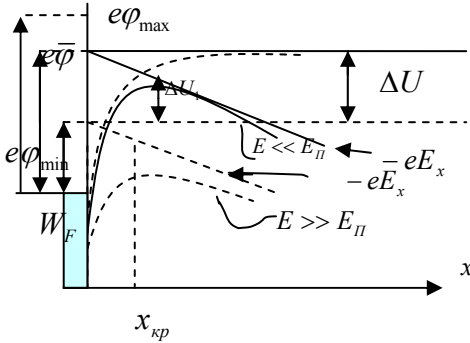


Рис. 7.8. Изменение потенциального барьера полем пятен.

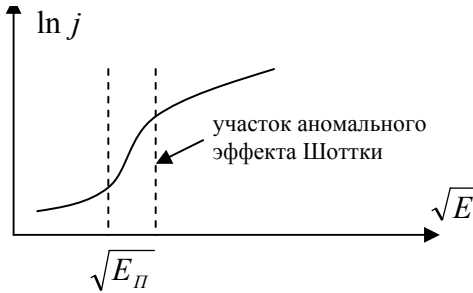


Рис. 7.9. Зависимость плотности термоэмиссионного тока от напряженности внешнего электрического поля

При дальнейшем увеличении  $E$  эмиссия с областей, имеющих  $\varphi_{\min}$ , будет происходить независимо от пятен с  $\varphi_{\max}$ , увеличение тока термоэмиссии будет соответствовать снижению работы выхода по нормальному эффекту Шоттки.

По экспериментальной зависимости  $\ln j(\sqrt{E})$  (рис. 7.9) можно определить порядок электрических полей пятен  $E_{II}$ , а скачок  $\Delta(\ln j)$  имеет порядок разности работ выхода  $\delta\varphi = \varphi_{\max} - \varphi_{\min}$ :

$$\Delta(\ln j) = \frac{e\delta\varphi}{kT}.$$

Учитывая, что  $E_{II} \sim \frac{\delta\varphi}{\delta y}$ , можно оценить характерный размер

пятен. Поле пятен возникает не только над поликристаллической поверхностью металла, но и в случае покрытия поверхности катода тонкой неоднородной пленкой адсорбированных атомов.

Так как ток термоэмиссии сильно зависит от работы выхода поверхности (7.6), то адсорбция электроположительных элементов (щелочных или щелочноземельных) сильно понижают  $\varphi_a$  увеличивая  $j_{T\sigma}$ , в то время как адсорбция электроотрицательных (O, Cl, S, C) приводит к обратному. Если поверхность имеет участки с разной работой выхода (что может происходить при соприкосновении

разных по электронным свойствам металлов или при адсорбции на некоторых участках атомов, изменяющих работу выхода), то между такими участками возникает *контактная разность потенциалов* (КРП). Действительно, из-за свободного перетекания электронов из одного металла в другой в контактирующих участках устанавливается общий химический потенциал или единый уровень Ферми, а между поверхностями возникает разность потенциалов  $U_k = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Выражение (7.16) справедливо для полей  $E < 10^5$  В/см, а аномальный эффект Шоттки наиболее сильно проявляется при  $E < 10^4$  В/см.

Значения работы выхода наиболее часто используемых для термокатодов металлов приведены в таблице 7.1

Таблица.7.1.

	Ir	W	Mo	Ta	C	La	Th	Ba	Cs
$e\varphi_a$ , эВ	4,7	4,54	4,3	4,12	4,1	3,3	3,3	2,49	1,81

Как уже указывалось, адсорбция на поверхности атомов с относительно слабосвязанными электронами может приводить к тому, что в результате переноса валентного электрона адатома в металл на поверхности образуется положительный заряд (или дипольный слой), который уменьшает плотность отрицательного электронного заряда вблизи поверхности, в результате чего уменьшается работа выхода. Снижение  $e\varphi_a$  зависит от поверхностной плотности  $N_a$  и дипольного момента  $p_a$  адатомов  $\Delta e\varphi_a = 4\pi N p_a$

Минимальное значение  $e\varphi_a$  достигается при степени покрытия  $\theta = 0,7$ . Так, при адсорбции 0,7 монослоя Cs на W  $e\varphi_a = 1,45$  эВ, а уже при двух монослоях  $e\varphi_a$  соответствует работе выхода адсорбированного элемента (1,81 эВ для Cs). Такие высокоэффективные *пленочные катоды* в случае использования цезия создаются его адсорбцией из паровой фазы, а для бария и тория – термодиффузией атомов из объема вольфрамового катода после специальной термической обработки. (Для катодов часто используется торированный вольфрам, помимо снижения работы выхода, такой материал обладает значительно лучшими механическими свойствами, чем чистый W, который весьма хрупок).

В качестве термоэммиттеров широко используется гексаборид лантана ( $\text{LaB}_6$ ). Он обладает металлическими свойствами, а высокую эмиссионную способность обеспечивает образующаяся на поверхности при высокой температуре моноатомная пленка атомов La, обладающая высокой энергией связи с поверхностью катода.

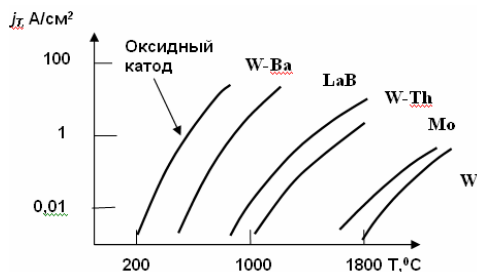


Рис.7.10 Характеристики термоэмиссионных катодов

Еще большей эмиссионной способностью при пониженных температурах (см. рис.7.10) обладают *оксидные катоды*, представляющие собой металл (чаще всего W) с нанесенным на него слоем  $\sim 1$  мкм (это уже не одноатомная пленка) оксида ( $\text{BaO}$ ,  $\text{SrO}$ ,  $\text{CaO}$ ). Фактически оксиды представляют собой диэлектрики, но после

активирования (прогрева при, котором кислород уходит, и часть оксидов восстанавливается до металла) слой превращаются в полупроводник *n* типа с очень высокой эмиссионной способностью (работа выхода всего 1,0 – 1,2 эВ). Долговечность таких катодов ограничена временем жизни пленки оксида (испарение и распыление при высоких отбираемых токах за счет перегрева термоэмиссионным током слоя оксида), и в плазменных установках такие катоды практически не применяются.

Долговечность металлических катодов достаточно большая, так как тугоплавкие материалы имеют низкие коэффициенты испарения и распыления, однако наличие в объеме плазменной установки паров воды приводит к дополнительному уносу материала катода за счет диссоциации молекул воды на горячем катоде с последующим образованием окисла, его испарения и осаждения на более холодных стенках камеры.

#### §45. Автоэлектронная (полевая) эмиссия

В присутствии внешнего электрического поля высокой напряженности ( $E = 10^6 \div 10^7$  В/см) из-за ограниченности толщины барьера

появляется вероятность подбарьерного перехода – «туннельного» эффекта (рис.7.4). Испускание электронов под действием внешнего электрического поля, обусловленное вероятностью подбарьерного перехода потенциального барьера, имеющего во внешнем электрическом поле ограниченную ширину, называется *автоэлектронной* или *полевой эмиссией*. Коэффициент прохождения (прозрачности) барьера зависит от энергии электрона  $W_x$ , высоты потенциального барьера  $W_a$ , и для прямоугольного барьера ширины  $dx$  выражается соотношением:

$$D(W_x) = \exp(-4\pi\sqrt{2m_e(W_a - W_x)}dx / h). \quad (7.17)$$

Для вычисления прозрачности потенциального барьера непрямоугольной формы можно его разделить на ряд прямоугольных барьеров ширины  $dx$ , и проинтегрировать по ширине барьера. В итоге зависимость от энергии электрона выражается формулой:

$$D(W_x) = \exp\left[-\frac{8\pi\sqrt{2m_e}}{3he} \cdot \left(\frac{W_a - W_x}{E}\right)^{3/2} \cdot \theta(\zeta)\right], \quad (7.18)$$

где  $\theta(\zeta)$  – функция Нордгейма, выражающаяся через эллиптические интегралы, где  $\zeta = \frac{\Delta\varphi_{ш}}{\varphi_a(W_x)} = \frac{\Delta\varphi_{ш}}{W_a - W_x} = \frac{e^{3/2}E^{1/2}}{W_a - W_x}$ . Некоторые значения функции Нордгейма представлены в таблице 7.2.

Таблица 7.2.

$\Delta\varphi_{ш}/\varphi_a$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\theta$	1	0.98	0.94	0.87	0.79	0.69
$\Delta\varphi_{ш}/\varphi_a$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
$\theta$	0.58	0.45	0.31	0.16	0	

Для  $0 < \zeta < 1$   $\theta(\zeta) \approx 0.955 - 1.03\zeta^2$ . Плотность тока автоэлектронной эмиссии можно описать *формулой Фаулера-Нордгейма*:

$$j_{AЭ} \left[ \frac{A}{\text{см}^2} \right] = B_0 \cdot \frac{E^2}{e\varphi_a} \cdot \exp\left(-\frac{(e\varphi_a)^{3/2} \theta(\Delta\varphi_{ин} / \varphi_a)}{E / E_0}\right) = \quad (7.19)$$

$$= 6.2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\sqrt{E_F / e\varphi_a} E^2 [B / \text{см}]}{E_F + e\varphi_a} \cdot \exp\left(-\frac{6.85 \cdot 10^7 \cdot (e\varphi_a)^{3/2} \theta(\Delta\varphi_{ин} / \varphi_a)}{E [B / \text{см}]}\right),$$

где  $E_F$  – энергия Ферми,  $B_0 = e^2 / (8\pi h)$ ,  $E_0 = 8\pi \sqrt{2m_e} / (3he)$ . Влияние множителя  $E^2$  (квадрат напряженности электрического поля на поверхности металла), подобно влиянию множителя  $T^2$  в формуле Ричардсона-Дэшмана, незначительно. Более существенно влияние экспоненциальной зависимости от работы выхода электрона  $e\varphi_a$ . Автоэлектронная эмиссия с микроскопических острий чаще всего является причиной пробоя вакуумных промежутков. Автоэлектронные катоды изготавливаются в виде игл (острий) с большой кривизной поверхности, около которых электростатическое поле превышает  $10^6$  В/см. Полевая эмиссия с острий дает очень большие плотности тока  $10^5$ – $10^8$  А/см<sup>2</sup>, а при высоких полях  $\sim 10^8$  В/см они могут достигать значений  $j_{ПЭ} \approx 10^9$  А/см<sup>2</sup>.

#### §46. Изменение температуры эмиттера при термо- и полевой эмиссии. Зависимость эмиссии электронов от других факторов

Средняя энергия, уносимая электроном с поверхности при термоэлектронной эмиссии, может быть вычислена в предположении максвелловского распределения электронов по скоростям, с учетом того, что энергия вышедших из металла электронов определяется из соотношений между компонентами скорости электрона в металле  $v$  и в вакууме  $u$  :

$$\begin{cases} mu_x^2 / 2 = mv_x^2 - W_a \\ u_y = v_y \\ u_z = v_z \end{cases}, \quad (7.20)$$

где ось  $x$  направлена по нормали к поверхности. Число электронов в направлении по нормали к поверхности металла со скоростями в

пределах от  $u_x$  до  $u_x + du_x$  задается *модифицированным распределением Максвелла* :

$$\begin{aligned} dN &= \frac{4\pi m^2}{h^3} k_B T \exp(E_F / k_B T) \exp\left(-\frac{2mW_a + m^2 u_x^2}{2mk_B T}\right) u_x du_x = \\ &= \frac{4\pi m^2}{h^3} k_B T \exp(-e\varphi_a / k_B T) \exp\left(-\frac{mu_x^2}{2k_B T}\right) u_x du_x = \\ &= \frac{mN}{k_B T} \exp\left(-\frac{mu_x^2}{2k_B T}\right) u_x du_x = \frac{N}{k_B T} \exp\left(-\frac{W_x}{k_B T}\right) dW_x, \quad (7.21) \end{aligned}$$

где  $N = j_T/e$  – число термоэлектронов с единицы площади в секунду. Средняя энергия по нормали к поверхности:

$$\overline{W}_x = \int_{u_x=0}^{u_x=\infty} W_x \frac{dN}{N} = k_B T \int_0^\infty \varepsilon \exp(-\varepsilon) d\varepsilon = k_B T, \quad (7.22)$$

где  $\varepsilon = W_x/k_B T$ . Для двух других направлений средняя энергия как для обычного распределения Максвелла:  $\overline{W}_y = \frac{1}{2} k_B T$  и

$\overline{W}_z = \frac{1}{2} k_B T$ . В итоге среднее значение полной энергии электрона, вылетающего с поверхности эмиттера при температуре  $T_S$ :

$$\overline{W} = \overline{W}_x + \overline{W}_y + \overline{W}_z = 2k_B T_S. \quad (7.23)$$

Если между катодом и анодом приложить тормозящую разность потенциалов, то условие попадания электрона на катод:  $m_e v^2/2 \geq -eU_a$ , где напряжение на аноде  $U_a < 0$ . Ток на анод:

$$I_a = S_a \int_{\sqrt{\frac{2eU_a}{m_e}}}^{\infty} u_x N_e \frac{m_e}{k_B T} \exp\left(-\frac{mu_x^2}{2k_B T}\right) du_x = I_s \exp\left(\frac{eU_a}{k_B T}\right), \quad (7.24)$$

где  $I_s$  – ток с эмиттера. Меняя  $U_a$ , можно экспериментально определять распределение электронов по энергиям. Эксперименты подтверждают то, что эмитированные электроны имеют распределение Максвелла, причем температура электронов, определенная по максвелловскому распределению, равна температуре эмиттера. Поэтому начальные энергии эмитированных электронов (с учетом того, что  $1 \text{ эВ} \approx 11600 \text{ К}$ ) можно считать нулевыми по сравнению с энергиями, приобретаемыми в ускоряющей разности потенциалов в несколько вольт. Однако для охлаждения поверхности эмиттера эта энергия существенна, к тому же каждый электрон помимо тепловой энергии уносит из металла энергию, равную работе выхода. Удельная мощность поверхностного охлаждения

$$w = -(j_T/e)(2k_B T_S + e\phi_a).$$

При полевой эмиссии за счет «туннельного» эффекта эмитируются электроны, обладающие энергией, меньшей энергии Ферми:  $E < E_F$ . Мощность поверхностного нагрева поверхности за счет прихода более высокоэнергетичных электронов из объема металла:  $w = (j_T/e)(E_F - E)$ . Таким образом, полевая эмиссия сопровождается нагревом поверхности, в то время как термоэлектронная – охлаждением (*эффект Ноттингема*).

В зависимости от приложенного напряжения и свойств поверхности твердого тела возможны и другие виды электронной эмиссии из твердого тела [48], происходящие без его облучения электромагнитными квантами или частицами.

**Взрывная эмиссия** наблюдается при разрушении автоэлектронного острия собственным автоэмиссионным током за счет омического нагрева и эффекта Ноттингема при приложении импульсного поля выше некоторого критического значения (для вольфрама  $E_{кр} = (6,5 \pm 1)10^7 \text{ В/см.}$ ). Взрыв острия (или микровыступа на плоском катоде) сопровождается образованием плазменного сгустка, быстрый уход из которого электронов приводит к образованию большого положительного объемного заряда. Это дополнительное поле усиливает эмиссионный ток до  $\sim 1000 \text{ А}$  с одного острия ( $j = 10^7 - 10^9 \text{ А/см}^2$ ). Взрывной катод – эрозионный, потери атомов составляют  $\sim 10^2$  на один эмитированный электрон. Однако после взрыва на соседних участках образуются новые удобные для подобного взрыва элементы микрорельефа. Поэтому после нескольких импульсов эмиссионные характеристики такого взрывного катода стабилизируются. Амплитуда прикладываемых импульсов напряжения составляют  $10^4 - 10^7 \text{ В}$  при длительности  $10^{-7} - 10^{-9} \text{ с}$ .

**Неметаллические полевые эмиттеры электронов.** Плотность извлекаемого тока можно повысить, увеличив скорости электронов в твердом теле. Разогреть электроны, не расплавив кристаллическую решетку, можно в полупроводниках с высокой подвижностью электронов, например, в GaAs. Для этого нужно приложить сильное электрическое поле на такое время, при котором не



успевают установиться термодинамическое равновесие между перегретым электронным газом и решеткой. "Горячие" электроны эмитируются, а между включениями поля решетка отдает рассеянную в ней мощность окружающей среде. В вакуум могут выйти электроны при условии, что энергия ионизации больше энергии сродства  $\chi$ . Энергия сродства для полупроводника – это минимальная энергия, которую необходимо затратить для вывода в вакуум электроно со дна зоны проводимости (рис.7.11).

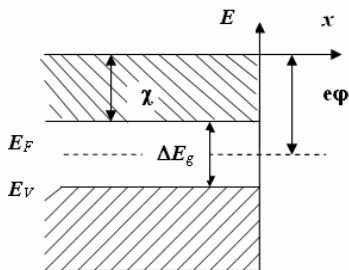


Рис.7.11 Электронная структура полупроводника:  $E_V$  – граница валентной зоны,  $\Delta E_g$  – ширина щели,  $\chi$  – энергия сродства

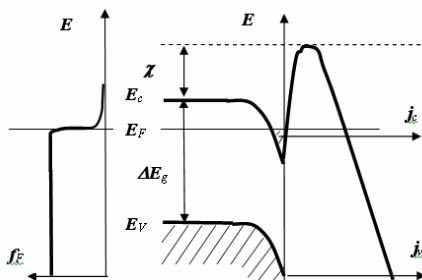


Рис. 7.12 Изменение уровней полупроводника вблизи поверхности при наличии внешнего электрического поля,  $j_c$  – ток электронов из зоны проводимости,  $j_v$  – ток электронов из валентной зоны

В отличие от металла внешнее электрическое поле проникает в полупроводник с меньшей концентрацией свободных носителей на величину радиуса Дебая, что приводит к изгибу зон у поверхности (рис.7.12). В результате при пересечении дном зоны проводимости уровня Ферми в ней появляются электроны. В итоге в токе полевой эмиссии наряду с электронами валентной зоны ( $j_v$ ) могут участвовать и электроны зоны проводимости ( $j_c$ ).

В p-n переходах можно создавать сильное «греющее» поле, прикладывая разность потенциалов в запирающем направлении, а используя (n-p-n) переходы можно управлять эмиссионным током. Плотность тока «горячих» электронов в таких инжекционных катодах может достигать  $100 \text{ A/cm}^2$ .

Практически безынерционные катоды можно создать из диспергированных металлических пленок на диэлектрике (ДМП). При приложении поля  $E > 10^3 \text{ В/см}$  вдоль такой структуры, состоящей из островков металла размерами  $\sim 10 \text{ нм}$  на диэлектрической подложке, протекающий ток разогревает электронный газ в островке и туннелирующие от островка к островку через диэлектрические промежутки электроны становятся все более «горячими» по мере снижения на разность потенциалов между соседними островками барьера. Эмиссия горячих электронов с  $j = 1-10 \text{ A/cm}^2$  происходит из промежутков между островками.

Реализовать необходимые для полевой эмиссии высокие напряженности электрического поля можно в МДМ (металл-диэлектрик-металл) структурах. Для этого слой диэлектрика должен быть достаточно тонким (5-20нм), поэтому разность потенциалов на металлических электродах в 5-20 В создает поля

$\sim 10^7$  В/см. Ширина барьера при этом, как в эффекте Шоттки, резко уменьшается и электроны из металла попадают в зону проводимости диэлектрика, а затем в металлическую пленку. Эта положительная относительно базового металлического электрода пленка должна быть достаточно тонкой (10-20 нм), что обеспечить прохождение горячих электронов в ней без столкновений. Плотность тока эмиссии МДМ структур может составлять до  $10 \text{ А/см}^2$ , а зависимость от приложенного напряжения подчиняется закону Фаулера-Нордгейма (7.19). В качестве эмиссионных МДМ структур используются Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Al, Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Au, Au-VN-Au, Be-BeO-Au и другие.

Следует отметить, что спонтанное образование описанных выше структур возможно в плазменных установках при распылении и переосаждении материалов в результате падения частиц плазмы на обращенные к ней элементы, так как в остаточном газе, как правило, присутствует и кислород. Так как на границе плазма-стенка всегда присутствует вытягивающее электроны поле (см. главу 1), а пристеночная разность потенциалов определяется в том числе эмиссионными свойствами поверхности, то генерация подобных структур может сильно повлиять на взаимодействие плазмы со стенкой.

Эмиссия электронов возможна и из чисто диэлектрических тонких слоев на поверхности металлических электродов (молтеровская эмиссия). Это явление достаточно широко распространено в плазменных установках, когда для электродов используют материалы, легко образующие оксиды (Al и его сплавы, например). Механизм возникновения эмиссии следующий: нанесенный из плазмы на поверхность диэлектрической пленки положительный заряд создает в тонком слое ( $\leq$  мкм) диэлектрика поле  $\sim 10^5 - 10^6$  В/см, достаточное для ионизации донорных примесей в диэлектрике. Появление в результате этого положительного объемного заряда приводит к перераспределению поля с резким усилением напряженности на границе металла до  $10^7$  В/см, которой, в свою очередь, достаточно для туннелирования электронов из металла в свободную зону диэлектрика. Если на поверхности наступает равновесие между числом электронов, нейтрализующих поверхностный положительный заряд, и числом эмитированных электронов (эмиссия электрона соответствует приходу положительного заряда), то положительный заряд на поверхности поддерживается приходящими из металла электронами, и наблюдается молтеровская эмиссия. Она может продолжаться длительное время после выключения разряда и источника зарядки поверхности из плазмы. Причем длительность такой «спонтанной» эмиссии для пористых диэлектрических слоев, сопровождаемой свечением поверхности (за счет рекомбинации дырок и электронов) может достигать тысячи часов (при плотности тока эмиссии  $\sim 5 \text{ мА/см}^2$ ).

Совершенно удивительно выглядит эмиссия с поверхности заряженных частиц (и нейтральных атомов) без, казалось бы, внешних источников воздействия. Однако причины такой, на первый взгляд, спонтанной экзоэмиссии вполне реальные и достаточно многочисленны [48].

Иногда экзоэмиссия возникает после импульса разрядного тока (после-разрядная эмиссия). Эта эмиссия также связана с наличием на электродах окисных пленок, в которых под действием сопровождавшего разряд электромагнитного излучения появляется заряд. Токи такой эмиссии очень малы ( $10^{-14} - 10^{-18} \text{ А/см}^2$ ), но протекать они могут на протяжении длительного времени, так, для пористого оксидного катода токи с плотностью  $\sim 10^{-15} \text{ А/см}^2$  наблюдались в течение недели после разрядного импульса.

Фазовые переходы на поверхности также могут приводить к экзоэлектронной эмиссии, которая проявляется как спонтанные всплески тока ( $10^{-2}$  -  $10^3$  имп/сек) при разложении объемных кристаллогидратов, гидрооксидов металлов, в момент затвердевания металлов и сплавов и других фазовых превращений. Эмиссией электронов сопровождаются также реакции, связанные с температурным отжигом дефектов, ранее введенных ионизирующими излучениями, а также механическими воздействиями. В последнем случае эмиссия возникает при сжатии, растяжении или изгибе в основном стекла, графитов, кристаллов оксидов-диэлектриков, кварца, полимеров и композитов. Кроме того, известна и трибозмиссия, сопровождающая сухое трение материалов.

Экзоэмиссия сопровождается химическими реакциями на поверхности, например, при хемосорбции электроотрицательных молекул (кислорода, галогенов) на щелочных, щелочноземельных металлах и металлах IV группы с невысокой работой выхода. В этом случае энергия реакции переходит в энергию электронного возбуждения. Механизм основан на процессах Оже-девозбуждения при переходе электронов металла на глубоко лежащие дырочные состояния адсорбата – уровни сродства  $E_A$  адсорбирующейся молекулы. Интенсивная эмиссия электронов и ионов происходит с металлов (Al, Cu и др., сплавов, включая нержавеющие стали), подвергнутых электрохимической коррозии в кислотах, растворах солей. Гетерогенно-каталитические реакции, протекающие на металлах, оксидах, монокристаллах щелочных галогенидов, также сопровождаются эмиссией электронов и ионов.

Возможным каналом эмиссии заряженных частиц могут служить поры в газонасыщенном материале (порозлектронная эмиссия). В этом случае поры можно рассматривать как локальные полые катоды (см. ниже).

## §47. Фотозлектронная эмиссия

Испускание электронов под действием падающего на поверхность электромагнитного излучения называется фотозлектронной эмиссией (ФЭЭ). Поток электромагнитного излучения частью отражается, а частью проникает внутрь тела и там поглощается, отдавая энергию электронам проводимости, которые могут преодолеть потенциальный барьер и выйти из тела. ФЭЭ была обнаружена Герцем 1887 г. Основные законы ФЭЭ, установленные экспериментально задолго до теоретического обоснования, сводятся к следующему:

1. Фотозлектронный ток в режиме насыщения пропорционален падающему на эмиттер плотности потока мощности (или интенсивности облучения  $I$  [Вт/см<sup>2</sup>])

$$j_{ФЭЭ} \sim I \quad (\text{закон Столетова – 1889 г.}). \quad (7.25)$$

2. Теоретическое обоснование экспериментально открытой Ленардом (1899 г.) закономерности – максимальная энергия фотоэлектронов прямо пропорциональна частоте падающего излучения и не зависит от его интенсивности – впервые дал Эйнштейн, введя в физику понятие о квантах света (фотонах):

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = h\nu - e\varphi_a \quad (\text{закон Эйнштейна}). \quad (7.26)$$

Отклонение от закона Эйнштейна возникает при больших интенсивностях излучения, когда электрон может поглощать несколько ( $N$ ) фотонов:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = Nh\nu - e\varphi_a \quad (7.27)$$

3. Следствием закона Эйнштейна является существование длинноволновой (красной) границы  $\lambda$  области спектра падающего излучения, которое может вызывать фотоэмиссию электронов:

$$\lambda < \lambda_{cp}, \text{ или } \nu > \nu_{cp} = c/\lambda_{cp} = e\varphi_a/h, \quad (7.28)$$

таким образом, граничная длина волны выражается через работу выхода

$$\lambda_{cp}[A^\circ] = 12300/(e\varphi_a[\text{эВ}])$$

при  $T = 0 \text{ К}$ . При  $T \neq 0$  в металле имеются электроны с энергиями, большими  $E_F$ , для них граничная частота снижается. Но в холодном металле доля таких электронов крайне мала. Кроме того, работа выхода, а значит, и граничная частота зависит от напряженности электрического поля на поверхности (эффект Шоттки).

4. Фотоэффект обладает свойством безынерционности - фототок появляется и исчезает вместе с освещением, запаздывая не более чем на  $10^{-14}$  с.

Фотоэффект можно характеризовать либо *квантовым выходом*  $Y$  – числом электронов на один фотон ( $Y = 10^{-3} \div 10^{-1}$ ), либо плотностью фототока  $j_\phi$ . Отношение фототока к интенсивности потока монохроматического излучения выражает *спектральную чувствительность* фотокатодов, а к интенсивности потока излучения стан-

дартного источника света – *интегральную чувствительность*. Глубина выхода электронов из металлов составляет несколько атомных слоев, поэтому, теряя на своем пути часть энергии, фотоэлектроны на выходе из металлов имеют некоторое распределение по энергиям от нуля до максимального значения, определяемого по закону Эйнштейна. Распределение фотоэлектронов по энергиям можно определить экспериментально методом задерживающего потенциала. Для сбора на анод всех фотоэлектронов в опытах Лукирского и Прилежаева использовались катод в виде шара и анод в виде концентрической катоду сферы, через узкое отверстие которой на катод подавался луч света. Разность значений тока при двух задерживающих потенциалах  $-U$  и  $-(U + \Delta U)$  дает число фотоэлектронов, энергия которых при вылете с катода лежит в пределах от  $eU$  до  $e(U + \Delta U)$ . Этот же метод можно использовать для определения красной границы фотоэффекта. Задерживающий потенциал, при котором фототок становится равным нулю, определяет разность между частотой  $\nu$  кванта и граничной частотой фотоэффекта  $\nu_{cp}$  для данного материала:  $U_0 = h(\nu - \nu_{cp})/e$ . Значения  $U_0$ , определяемые для разных частот облучения  $\nu$ , лежат на прямой, точка пересечения которой с осью абсцисс дает граничную частоту  $\nu_{cp}$ .

Основные закономерности ФЭЭ металлов хорошо описываются теорией Фаулера, согласно которой после поглощения в металле фотона его энергия переходит электронам проводимости, в результате чего электронный газ в металле около его поверхности состоит из смеси газов с нормальным (распределением Ферми) и возбужденным (сдвинутым на  $h\nu$ ) распределением по энергиям (рис. 7.13). Для подсчета числа фотоэлектронов можно провести такое же интегрирование функции распределения, что и при подсчете плотности тока термоэмиссии, изменив нижний предел интегрирования с  $W_a$  на  $W_a - h\nu$ , тем самым включив в интегрирование электроны, которые приобретают недостающую для преодоления потенциального барьера энергию за счет поглощенных квантов. Так же, как и для термоэлектронов, необходимо учитывать вероятность прохождения барьера, так как часть электронов при движении из металла может быть отражена от поверхности раздела металл - вакуум.

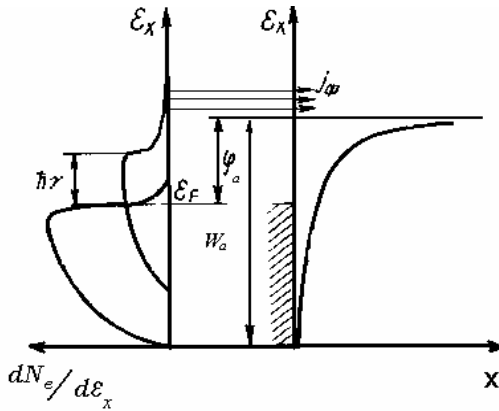


Рис. 7.13. Фотоэмиссионный ток преодолевающий потенциальный барьер электронов из «хвоста» возмущенной функции распределения

Кроме этого, необходимо учесть вероятность поглощения фотона. Эта вероятность в общем случае зависит от энергии поглощающего электрона и энергии кванта. В теории Фаулера эта вероятность считается постоянной величиной, что, как оказалось, в интервале частот от  $\nu_{zp}$  до  $1.5\nu_{zp}$  выполняется. В результате интегрирования плотность фототока определяется по формуле Фаулера:

$$j_{\phi} = \begin{cases} B_1 T^2 \exp\left(\frac{h\nu - h\nu_{zp}}{kT}\right), & \nu \leq \nu_{zp} = e\varphi_a / h \\ B_2 T^2 \left(\frac{(h\nu - h\nu_{zp})^2}{k^2 T^2} + B_3\right), & \nu > \nu_{zp} \end{cases}, \quad (7.29)$$

где  $B_1, B_2, B_3$  – постоянные коэффициенты, пропорциональные постоянной Ричардсона  $A_0$ . Зависимость  $j_{\phi}\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$  можно также представить в виде рядов [32]. Из формулы Фаулера видно, что при  $T \approx 0$   $j_{\phi} \rightarrow 0$  и  $\nu_{zp}$  действительно является красной границей. При  $T \neq 0$  не существует резкой границы фотоэффекта, фототок падает экспоненциально при  $\nu < \nu_{zp}$ , при  $\nu > \nu_{zp}$  плотность фототока пропорциональна квадрату частоты падающего излучения  $j_{\phi} \sim \nu^2$ .

Экспериментально положение  $\nu_{cp}$  определяют по измеренной спектральной зависимости фототока при заданной температуре  $T > 0$ . Эта зависимость откладывается на графике в координатах  $x = h\nu/kT$  и  $y = \ln(j_\phi/T^2)$ . Полученная экспериментальная кривая соответствует зависимости:

$$\ln(j_\phi/T^2) = B + F((h\nu - h\nu_{cp})/kT) = B + F(x - h\nu_{cp}/kT). \quad (7.30)$$

Экспериментальная кривая отличается от теоретической кривой функции Фаулера  $F = F(h\nu/kT)$  сдвигом по оси  $y$  на константу  $B$  и по оси  $x$  на  $h\nu_{cp}/kT$  (рис.7.14). Именно определение сдвига по оси  $x$  экспериментальной кривой для ее совмещения с теоретической кривой Фаулера позволяет найти граничную частоту  $\nu_{cp}$ .

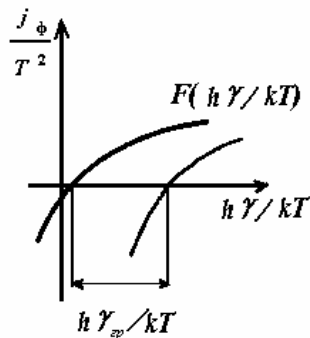


Рис. 7.14. Определение красной границы с помощью функции Фаулера

## §48. Вторичная электронная эмиссия

### *Вторичная электрон-электронная эмиссия*

Эмиссия электронов с поверхности твердого тела, бомбардируемой потоком электронов, называется вторичной электрон-электронной эмиссией. Вторичная электронная эмиссия характеризуется количеством вторичных электронов на одну первичную частицу:  $\gamma_e = N_s/N_p$ . Интегрально это количество равно отношению токов вторичных и первичных электронов  $I_s/I_p$ . Схема экспериментального исследования энергетического распределения вторичных электронов методом задерживающего поля с использованием сферического коллектора показана на рис. 7.15.

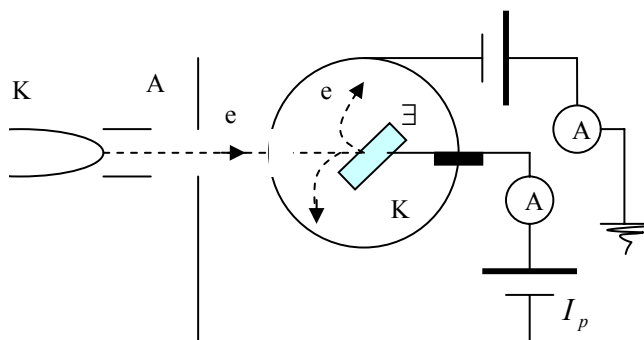


Рис. 7.15. Схема опыта по исследованию вторичной электрон-электронной эмиссии

Задерживающее поле прикладывается между мишенью и коллектором. Если потенциал коллектора  $U_k$  будет выше, чем на мишени, то на коллектор придет полный ток вторичной электронной эмиссии  $I_s$ . Дифференцируя кривую задержки  $U_k(I_s)$  находят энергетическое распределение электронов. Более точным методом определения скоростей вторичных электронов является использование дисперсионных электростатических энергоанализаторов, описанных в главе 5. Полученное экспериментальное энергетическое распределение (рис. 7.16) независимо от материала и энергии первичных электронов содержит два основных максимума. Первый в области малых энергий ( $<50$  эВ) соответствует *истинным вторичным электронам*, которые выходят из твердого тела за счет поглощения энергии первичных электронов. Далеко не все электроны, получившие дополнительную энергию, добираются до поверхности, растрачивая энергию по пути на взаимодействие с ионами решетки и другими электронами. Преодолевшие потенциальный барьер истинные вторичные электроны на выходе имеют энергии, не зависящие от энергии первичных электронов. Работа выхода материала также не оказывает существенного влияния на эмиссию вторичных электронов, так как, во-первых, энергия первичных электронов, как правило, гораздо больше работы выхода, во-вторых, эмиссия происходит не из поверхностных слоев, а из глубины металла, поэтому более важным является потеря энергии при движении электрона к поверхности. Второй, гораздо более узкий



максимум находится в области высоких энергий и соответствует упруго отраженным первичным электронам, практически полностью сохранившим свою скорость после отражения (в силу малости отношения массы электрона к массе атомов мишени).

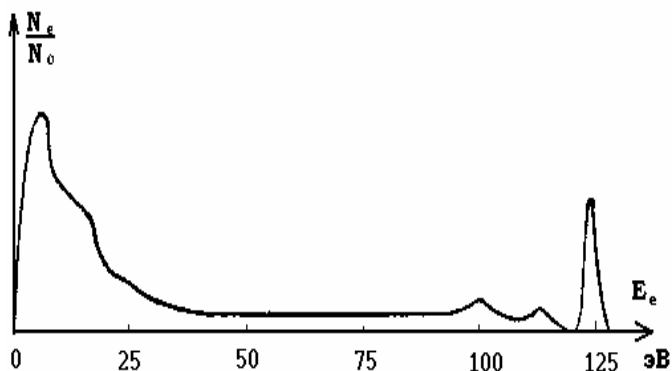


Рис. 7.16. Распределение вторичных электронов по энергиям

Область энергий между этими двумя максимумами соответствует неупруго отраженным вторичным электронам. Таким образом, энергетический спектр вторичных электронов состоит из широкого пика в области низких энергий с максимумом при  $W_{\max}$  (который принадлежит истинно-вторичным электронам, выходящим с глубины 5 – 100  $\text{Å}$  от поверхности) и очень узкого пика отраженных от поверхности электронов в области высоких энергий с максимумом при энергии, равной энергии первичных электронов. Для характеристики истинной электрон-электронной эмиссии вводят коэффициент вторичной электронной эмиссии  $\delta_e = N_s/N_p$ , где  $N_s$  – число истинно вторичных электронов,  $N_p$  – число первичных электронов. Для характеристики эмиссии отраженных от поверхности первичных электронов используется коэффициент отражения  $\eta_e = (N_e + N_u)/N_p$ , где  $N_e$  и  $N_u$  – упруго и неупруго отраженные электроны. Суммарный коэффициент вторичной электронной эмиссии  $\gamma_e = \delta_e + \eta_e$ . Зависимость  $\delta_e$  от энергии первичных электронов  $W_p$  можно найти по эмпирической формуле:

$$\frac{\delta_e(W_p)}{\delta_{e\max}} = (2.72)^2 \frac{W_p}{W_{\max}} \exp\left(-2\sqrt{\frac{W_p}{W_{\max}}}\right), \quad (7.31)$$

где  $\delta_{e\max} = \sqrt{0.35e\varphi_a}$ ,  $W_{\max}$  – значение и положение максимума.

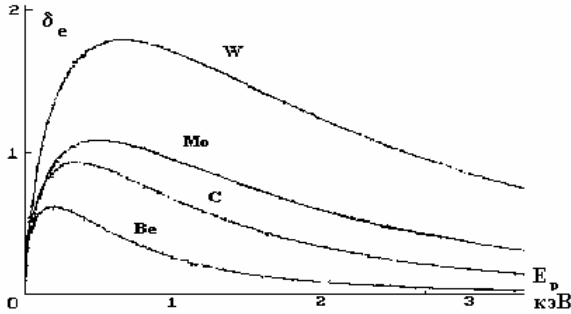


Рис. 7.17. Зависимость коэффициента истинной вторичной электронной эмиссии от энергии первичных электронов для W, Mo, C, Be

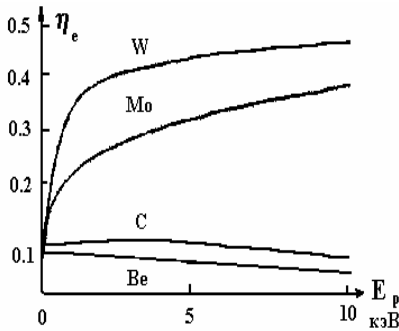


Рис. 7.18. Зависимость коэффициента отражения от энергии первичных электронов

Положение максимума зависимости коэффициента вторичной электронной эмиссии для разных материалов представлено в таблице 7.3. Рост  $\delta_e$  с энергией первичных электронов сменяется спадом (рис. 7.17), так как при дальнейшем росте энергии первичных электронов образование вторичных происходит все глубже и глуб-

же и их выход становится все более затрудненным. Этим же объясняется существование сдвига максимума  $W_{max}$  в энергетическом распределении вторичных электронов для материалов с высоким атомным числом (например, для вольфрама) в сторону низких энергий из-за снижения длины пробега первичных электронов в твердом теле (электронам, получившим энергию от первичных вблизи поверхности, легче выйти из твердого тела). Зависимость  $\delta_e$  от угла падения первичных электронов  $\alpha$  (угол с нормалью к поверхности) для  $\alpha < 60^\circ$  можно представить в виде:

$$\delta_e(\alpha) = \delta_e(0) / \cos^\beta \alpha, \quad (7.32)$$

где  $\beta = 1.3 \div 1.5$ . Чем больше  $\alpha$ , тем меньше глубина, которую нужно преодолеть вторичному электрону для выхода. Эмпирическая зависимость коэффициента отражения  $\eta_e$  для нормального падения электронов от энергии первичных электронов  $E_p$  (рис.7.18) и атомного номера  $z$ :

$$\eta_e(E_p, z) = E_p^{m(z)} \exp(C(z)), \quad (7.33)$$

где  $m(z) = 0.1382 - 0.9211z^{-0.5}$ ,  $C(z) = 0.1904 - 0.2236 \ln z + 0.1292 \ln^2 z - 0.01491 \ln^3 z$  (формула Хунгера).

Зависимость  $\eta_e$  от угла падения  $\alpha$ :

$$\eta_e(\alpha) = 0.891 \left( \frac{\eta_e(0)}{0.891} \right)^{\cos \alpha} \quad (\text{формула Дарлингтона}). \quad (7.34)$$

Таблица 7.3.

	<b>Al</b>	<b>Be</b>	<b>C (ал-маз)</b>	<b>C (графит)</b>	<b>Cu</b>	<b>Fe</b>
$\delta_{emax}$	1.0	0.5	2.8	1.0	1.3	1.3
$W_{max}$ [эВ]	300	200	750	300	600	400
	<b>Mo</b>	<b>Ni</b>	<b>Ta</b>	<b>Ti</b>	<b>W</b>	
$\delta_{emax}$	1.25	1.3	1.3	0.9	1.4	
$W_{max}$ [эВ]	375	550	600	280	650	

Наиболее распространенным применением вторичной электронной эмиссии являются электронные умножители, принцип действия которых показан на рис. 7.19. Максимально полное попадание вторичных электронов на последующий эмиттер может обеспечиваться магнитной или электрической фокусировкой. Между входным электродом и предпоследним прикладывается такая разность потенциалов, которая обеспечивает значение коэффициента вторичной электронной больше единицы между двумя соседними электродами. Именно при этом условии происходит размножение электронов с коэффициентом умножения для жалюзийного усилителя  $\sim 10^5$ . При регистрации фотонов используются специальные фотоэмиссионные катоды, а сам прибор помещают в отпаивающую колбу (ФЭУ). Для регистрации корпускулярного излучения – ионов, электронов, быстрых атомов используют умножители открытого типа (ВЭУ-1, ВЭУ-2).

Разновидностью вторичного электронного умножителя является умножитель канального типа, который представляет собой изогнутый канал из специального полупроводящего стекла. Сам материал канала и его изогнутая форма обеспечивают более высокие коэффициенты эмиссии за счет наклонного попадания электронов на стенки с распределенным вдоль них потенциалом. Прикладываемая разность потенциалов (3-4 кВ), а коэффициент умножения составляет  $10^6 - 10^8$  (ВЭУ-4, ВЭУ-6). Для слабых плотностей потоков используют микроканальные пластины (МКП), что позволяет изготавливать позиционно чувствительные детекторы (и измерять, например, энергетический спектр частиц после плоскопараллельного электростатического дефлектора).

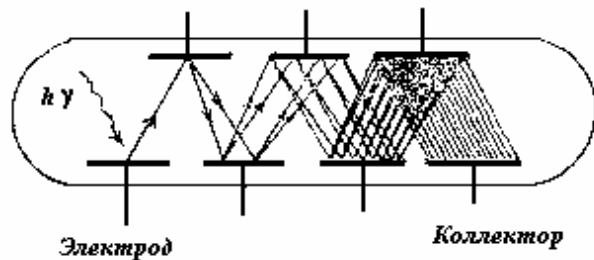


Рис. 7.19. Принцип действия вторичного электронного умножителя

### ***Вторичная ионно-электронная эмиссия***

При взаимодействии ионов с поверхностью твердого тела наблюдается эмиссия электронов, характеризуемая коэффициентом

ионно-электронной эмиссии:  $\gamma_i = n_e/n_i$ , где  $n_e$  - число эмитированных электронов,  $n_i$  - число ионов, упавших на ту же поверхность за то же время. Для однозарядных ионов  $\gamma_i = n_e/n_i = j_e/j_i$ , при эмиссии под действием ионов зарядом  $Z$   $\gamma_i = Zj_e/j_i$ . Эмиссия электронов может происходить в результате двух процессов: первый процесс, связан с возбуждением электронов тела за счет потенциальной энергии электронов эмиттера в поле приходящего на поверхность тела иона – такую эмиссию называют *потенциальной* с коэффициентом эмиссии  $\gamma_n$ ; второй процесс связан с возбуждением электронной системы тела кинетической энергией иона – в этом случае эмиссию называют *кинетической* с коэффициентом эмиссии  $\gamma_k$ . Если присутствуют оба процесса, то  $\gamma_i = \gamma_n + \gamma_k$ . Потенциальная ионно-электронная эмиссия была открыта Пеннингом в 1928 г. При исследовании зависимости электронной эмиссии от энергии падающих ионов он обнаружил, что эмиссия остается и при очень малых, практически нулевых, энергиях ионов. Из этого можно было сделать вывод, что испускание электронов не связано с кинетической энергией ионов. В экспериментах было выявлено, что такая потенциальная ионно-электронная эмиссия происходит только для ионов, потенциал ионизации которых  $V_i$  в два раза больше работы выхода материала эмиттера  $\phi_a$ :

$$V_i > 2\phi_a. \quad (7.35)$$

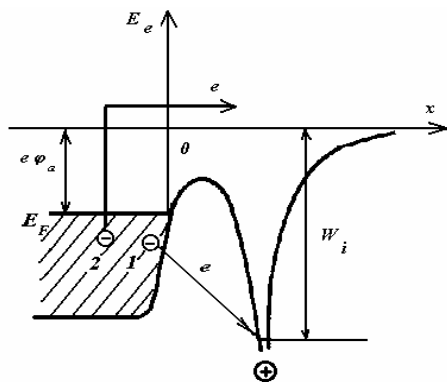


Рис. 7.20. Схема потенциальной ионно-электронной эмиссии

Это находит объяснение в модели оже-нейтрализации иона. Приближаясь к поверхности металла, ион изменяет своим полем поверхностный потенциальный барьер, понижая его. Один электрон, имея в металле энергию  $E_1$ , совершает туннельный переход и нейтрализует ион (рис. 7.20). При этом выделяемая энергия  $V_i - E_1$  может быть передана второму электрону, имеющему в металле энергию  $E_2$ . Для того чтобы второй электрон вышел из металла, его кинетическая энергия должна быть больше нуля:  $mv^2/2 = V_i - E_1 - E_2 > 0$ . С учетом того, что при низких температурах  $E_1$  и  $E_2$  меньше  $\varphi_a$ ,  $V_i > 2\varphi_a$ . Опыт показывает, что коэффициент  $\gamma_n$  линейно растет с увеличением разности  $V_i - 2\varphi_a$  для различных пар мишень – ион. Для чистых поверхностей эту зависимость можно описать эмпирической формулой:

$$\gamma_n \approx 0.016(V_i - 2\varphi_a)[\text{эВ}]. \quad (7.36)$$

Коэффициент  $\gamma_n$  тем больше, чем больше заряд иона (кратность ионизации):  $\gamma_n(A^+) < \gamma_n(A^{++}) < \gamma_n(A^{+++})$ . Для мишеней, поверхность которых достаточно чистая,  $\gamma_n$  практически не зависит от энергии падающих ионов  $E_p$ :  $d\gamma_n/dE_p \approx 0$ . При большой величине разности  $V_i - 2\varphi_a \gg k_B T$  коэффициент потенциальной ионно-электронной эмиссии не зависит от температуры поверхности мишени. При малой величине этой разности:  $V_i - 2\varphi_a \approx k_B T$  термическое увеличение энергии электронов повышает вероятность эмиссии и  $\gamma_n$  растет с увеличением температуры, при этом потенциальная эмиссия возможна и при  $V_i < 2\varphi_a$ .

При высоких энергиях падающих ионов кинетическая ионно-электронная эмиссия преобладает над потенциальной. Экспериментально было обнаружено, что существует пороговое значение энергии первичных ионов, меньше которого коэффициент эмиссии  $\gamma_k \approx 0$ . В припороговой области энергий ионов ( $E_p < 10$  кэВ) коэффициент эмиссии пропорционален энергии:  $\gamma_k = C(E_p - (E_p)_{zp})$ , где  $C = \text{const}$ . Для чистых металлов  $C \leq 0.2 \cdot 10^{-2} \text{эВ}^{-1}$ . При более высоких энергиях  $\gamma_k \sim E_p^{1/2}$ . При облучении монокристаллов коэффициент  $\gamma_k$  зависит от угла падения ионов на поверхность, причем эта зависимость носит периодический характер: положения максимумов совпадают с направлениями падающих ионов вдоль кристаллографи-

ческих направлений в монокристалле. Современные представления о кинетической ионно-электронной эмиссии (модель Парилуса, Петрова, Кишиневского) основываются на двухэтапности процесса. На первом этапе кинетическая энергия иона передается электронной системе металла с образованием «дырок» (получая энергию, электроны атомов совершают межзонный переход в зону проводимости, образуя дырки). На втором этапе происходит рекомбинация дырки и электрона проводимости металла с передачей выделяющейся энергии за счет оже-процесса другому электрону проводимости, который эмитируется из мишени. Таким образом, второй этап кинетической ионно-электронной эмиссии близок по природе потенциальной эмиссии.

### ***Поверхностная ионизация***

*Ионная эмиссия* в результате термической десорбции частиц с поверхности твердого тела называется поверхностной ионизацией. В виде ионов могут испаряться как атомы самого нагретого тела (например, металла), так и атомы и молекулы, которые попали на поверхность из окружающей среды. Часть из них после адсорбции испаряются обратно в газ, но уже в виде положительных или отрицательных ионов. Поверхностная ионизация была открыта Ленгмюром и Кингдоном (1923г.), которые обнаружили в цилиндрическом диоде, заполненном парами цезия, ток положительных ионов. Степень поверхностной ионизации  $\alpha = n_i/n_a$ , где  $n_i$  - плотность ионов, отлетающих от поверхности,  $n_a$  - плотность испаряющихся атомов, характеризует зарядовое равновесие в испаряющемся потоке частиц и не зависит от способа поступления частиц на поверхность. Другой характеристикой поверхностной ионизации является коэффициент поверхностной ионизации  $\beta = n_i/n = n_i/(n_i+n_a)$  ( $\beta = \alpha/(1+\alpha)$ ). К описанию процесса ионизации испаряющихся атомов Ленгмюр применил формулу Саха для термической ионизации газа. В результате при образовании положительных ионов термодинамически равновесный ионизационный состав у поверхности тела можно характеризовать степенью ионизации  $\alpha$ , которая вычисляется из уравнения Саха-Ленгмюра:

$$\alpha = \frac{g_i}{g_a} \exp\left(\frac{e(\varphi_a - U_i)}{kT}\right), \quad (7.37)$$

где  $U_i$  – потенциал ионизации атомов,  $e\varphi_a$  – работа выхода электронов из металла,  $g_i/g_a$  – отношение статистических весов ионного и атомного состояний ионизирующихся частиц равно  $1/2$  для одновалентного адсорбирующего металла и 2 - для двухвалентного. Если энергия ионизации атомов покрытия (например, Cs, K, Na на W) меньше работы выхода электронов из металлической подложки, то практически все испаряющиеся с покрытия атомы покидают поверхность в виде положительных ионов.

Атомы некоторых элементов могут покидать поверхность, присоединяя к себе электрон и превращаясь в отрицательный ион. Для разрушения отрицательного иона требуется совершить некоторую работу, которую называют *энергией сродства*  $eS$ . Часть таких адсорбированных атомов испаряются в виде отрицательных ионов. Для определения степени ионизации отрицательных ионов можно использовать уравнение, аналогичное уравнению Саха-Ленгмюра:

$$\alpha_- = \frac{g_-}{g_a} \exp\left(\frac{e(S - \varphi_a)}{kT}\right). \quad (7.38)$$



## ГЛАВА 8

### ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД

Газовый разряд – это процесс протекания электрического тока через газ. Различают несамостоятельные и самостоятельные разряды. Несамостоятельный разряд возможен при инжекции электронов в разрядный промежуток (например, термоэмиссия с катода) или при ионизации газа каким-либо внешним источником. Несамостоятельные разряды используют довольно широко: это и ионизационные камеры технологического и дозиметрического назначения на атомных реакторах, газотроны в выпрямительных установках сетей питания постоянным током, плазмотроны с накаливаемым катодом и т.д. Физические процессы, протекающие в разных несамостоятельных разрядах, естественно, различаются, но не все они характерны для собственно газовых разрядов, как обычно понимают этот термин. В них с помощью электрического поля просто собирают образующиеся в объеме заряды (что вообще-то не совсем "просто"!), в пропорциональных счетчиках используют ограниченное образование электронных лавин, в гейгеровских счетчиках происходит коронный разряд, в газотронах и тиратронах «обходят» закон « $3/2$ », как бы приближая анод к катоду, в дуговых лампах дневного света термоэмиссия с подогревных катодов только обеспечивает зажигание самостоятельной дуги. Однако наиболее широко применяются самостоятельные разряды, о них и будет прежде всего идти речь. Самостоятельный тлеющий разряд зажигается тогда, когда напряжение на его активных участках достигает "*напряжения пробоя*", для дугового разряда необходимо создать условия возникновения термоэмиссии с катода. Коронные разряды возникают только при наличии участков с очень большой неоднородностью напряженности электрического поля, а искровые разряды принципиально импульсные. Все это справедливо для разрядов в постоянных электрических полях, у широко используемых в технологиях разрядов, создаваемых с помощью ВЧ и СВЧ полей, есть своя специфика, тем более у создаваемой с помощью лазера искры.

## §49. Электрический ток в газах

Зависимость вероятности ионизации атомов любого газа от энергии частиц  $U$  задается функцией ионизации:

$$f_i = a(U - U_i) \exp(-(U - U_i)/b), \quad (8.1)$$

где  $a$  и  $b$  – эмпирические константы для конкретного газа. Время между столкновениями, приводящими к ионизации, обратно пропорционально частоте ионизации  $\tau_i = 1/\nu_i$ . Число ионизаций в единицу времени пропорционально плотности частиц газа  $n$ , скорости налетающей частицы  $\nu$  и сечению ионизации  $\sigma_i$ :

$$\nu_i = n\nu\sigma_i. \quad (8.2)$$

Ионизационный пробег  $\lambda_i$  (длина, на которой частица может ионизовать) равен

$$\lambda_i = \nu\tau_i = 1/(n\sigma_i) = 1/S_i, \quad (8.3)$$

где  $S_i = n\sigma_i$  называется *суммарным сечением ионизации*. Суммарное сечение ионизации также хорошо аппроксимируется подобной (8.1) зависимостью от энергии частицы  $U$ :

$$S_i = a(U - U_i) \exp(-b(U - U_i)) \quad (\text{формула Моргулиса}), \quad (8.4)$$

где  $a$  и  $b$  – эмпирические константы для конкретного газа. Зависимость суммарного сечения возбуждения имеет похожий вид:

$$S_r = S_{\max} \frac{U - U_r}{U_{\max} - U_r} \exp\left(1 - \frac{U - U_r}{U_{\max} - U_r}\right) \quad (\text{формула Фабриканта}), \quad (8.5)$$

где  $U_r$  – потенциал возбужденного уровня,  $U_{\max}$  и  $S_{\max}$  – энергия и сечение возбуждения в максимуме функции возбуждения, значения которых можно найти в справочных таблицах для конкретного газа. Время пребывания атома в возбужденном состоянии можно связать с числом переходов в единице объема в единицу времени  $N$ , тогда за промежуток времени  $dt$  число переходов:  $Ndt = wn_a dt$ , где

$w$  – вероятность данного перехода  $n_a$  - концентрация возбужденных атомов. Число актов излучения равно убыли числа возбужденных атомов:  $Ndt = -dn_a$ , тогда  $dn_a = -wn_a dt$ . Таким образом, число возбужденных атомов изменяется во времени по закону:

$$n_a(t) = n_{a0} \exp(-wt), \quad (8.6)$$

где  $n_{a0}$  – концентрация возбужденных атомов в начальный момент времени. За время  $t_0 = 1/w$  концентрация уменьшается в « $e$ » раз. Это время и полагают временем пребывания атома в возбужденном состоянии. Несмотря на малость этой величины  $t_0 \sim 10^{-8} \div 10^{-7}$  с, даже за столь короткое время существования возбужденного атома возможно получение новой порции энергии, достаточной для перехода атома на следующий уровень возбуждения, либо для ионизации атома, в этом случае говорят о *ступенчатой ионизации*. Именно такой процесс ступенчатой ионизации атомов ртути наблюдался в опытах Франка и Герца. Среди возбужденных состояний атомов и молекул существуют *метастабильные* состояния, времена жизни которых от  $10^{-4}$  до нескольких секунд. Самый нижний метастабильный уровень называется *резонансным*. Для ртути резонансный уровень возбуждения равен 4.7 эВ, при превышении энергией электронов этого значения наблюдался первый провал в зависимости тока от ускоряющего электроны потенциала. Метастабильная частица при столкновении с электроном может и *деактивироваться*, то есть перейти в основное состояние, этот процесс называется *неупругим соударением второго рода*.

Кроме образования положительных ионов при протекании тока в газе возможно возникновение отрицательных ионов. Для того, чтобы отрицательный ион существовал и был устойчив, его внутренняя энергия  $E_i$  должна быть меньше, чем энергия нормального состояния пары атом – свободный электрон  $E_0$ . Разность  $S = E_0 - E_i$  называется *средством* атома к электрону. В атомах с заполненной внешней электронной оболочкой (инертные газы He, Ne, Ar, Xe, Kr,..) электронная оболочка экранирует ядро и вероятность образования отрицательных ионов мала. Атомы с неполными внешними оболочками (F, Cl, K, Na...), у которых оболочки ближе всего к заполнению, образуют наиболее устойчивые отрицательные ионы.

Сродство этих атомов достаточно велико:  $eS_{F^-} = 3.4 \div 3.6$  эВ,  $eS_{Cl^-} = 3.82$  эВ. Если электрон до столкновения имел кинетическую энергию  $E_k$ , то при его захвате должна освобождаться энергия  $eS + E_k$ . Эта энергия может освобождаться через излучение:  $e + a \rightarrow a^- + h\nu$ , но более вероятен процесс образования отрицательного иона в результате столкновения трех тел  $X + Y + e \rightarrow X^- + Y + e$  или  $X + Y \rightarrow X^- + Y$ .

Для описания электрического тока в газах недостаточно рассмотрения процессов ионизации и рекомбинации. Необходимо описание движения заряженных частиц под действием электрических и магнитных полей, причем статистическое, т. е. усредненное по многочисленным столкновениям. При наличии электрического поля на хаотическое движение частиц накладывается направленное движение вдоль поля. Для стационарного процесса распространения тока средняя энергия и средняя скорость электронов должны оставаться постоянными, несмотря на присутствие ускоряющего электрического поля. Это возможно, если электрическая сила компенсируется силой трения (электроны при столкновениях отдают часть своей энергии). Таким образом, средняя скорость движения от одного электрода к другому, которую называют *скоростью дрейфа*  $u_d$ , остается постоянной. Подвижность заряженных частиц согласно общему определению (см. §10)

$$b_e [\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{см})] = u_d/E. \quad (8.7)$$

Скорость дрейфа можно оценить из предположения, что она много меньше тепловой скорости и в результате столкновения частица теряет всю кинетическую энергию. За время между столкновениями  $\tau_{cm}$  заряженная частица пройдет путь  $S = \frac{eE}{2m} \tau_{cm}^2$ ,  $u_d = S/\tau_{cm}$ , тогда:

$$b_e = \frac{eE\bar{\lambda}_{cm}}{2mv_T}, \quad (8.8)$$

где  $\bar{\lambda}_{cm}$  - средняя длина свободного пробега,  $v_T$  - тепловая скорость. Для распределения Максвелла усредненная по скоростям скорость дрейфа электронов (формула Ланжевена):

$$\begin{aligned} \bar{u}_d [cm/c] &= \sqrt{\frac{2m_e}{\pi kT}} \frac{eE}{2m_e} \bar{\lambda}_{cm} = 0.64 \frac{e\bar{\lambda}_{cm}}{m_e v_T} E = \\ &= 0.64 \frac{e\bar{\lambda}_1}{m_e v_T} \cdot \frac{E [B/cm]}{p [mm.pm.cm.]}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где  $\bar{\lambda}_1 = p\bar{\lambda}_{cm}$  - средний пробег электрона при давлении 1 мм.рт.ст. Для средней скорости дрейфа ионов, взаимодействующих с молекулами газа, формула Ланжевена имеет вид:

$$\bar{u}_d = a_i \frac{e\bar{\lambda}_{i1}}{m_i v_{iT}} \sqrt{1 + \frac{m_i}{m_\mu} \cdot \frac{E}{p}}, \quad (8.10)$$

$a_i$  – коэффициент, равный  $0.5 \div 1$ ,  $m_\mu$  - масса молекулы иона.

Электроны на своем пути ионизуют атомы, их «ионизиющую» способность Таунсенд предложил характеризовать коэффициентом  $\alpha$ , названным впоследствии *первым коэффициентом Таунсенда*, равным числу электронов, создаваемых электроном на единице длины пробега. При таком описании прирост количества электронов пропорционален  $\alpha$  и количеству атомов  $n$ :  $dn(x) = \alpha n dx$ . Тогда число электронов, создаваемых на пути  $x$ :

$$n_e(x) = n_0 \exp(\alpha x), \quad (8.11)$$

а первый коэффициент Таунсенда:

$$\alpha = (1/n)(dn/dx). \quad (8.12)$$

Процесс возникновения электронов можно также характеризовать *частотой ионизации*  $Y_i$  – число электронов, создаваемых одним электроном в единицу времени:

$$Y_i = (1/n)(dn/dt). \quad (8.13)$$

Тогда частота ионизации связана с первым коэффициентом Таунсенда через скорость дрейфа:

$$Y_i/\alpha = u_d.$$

Все три величины  $\alpha$ ,  $Y_i$ ,  $u_d$  зависят от напряженности электрического поля  $E$ . Сразу отметим, что  $\alpha(E)$ ,  $Y_i(E)$ ,  $u_d(E)$  весьма сложные зависимости, меняются с изменением условий разряда, но для  $Y_i(E)$  и  $\alpha(E)$  всегда весьма сильные (экспоненциальные, степенные).

### §50. Теория электронных лавин

В конце 80-х г. девятнадцатого века Ф.Пашен экспериментально установил, что напряжение зажигания разряда  $U_z$  зависит от произведения  $pd$  (где  $p$  – давление газа,  $d$  – расстояние между электродами) и имеет некое минимальное значение для данного газа (кривые Пашена на рис. 8.1). Для объяснения этого факта потребовалось количественное описание процесса размножения заряженных частиц в разряде. Первой количественной теорией газового разряда была *теория электронных лавин*, предложенная Таунсендом в самом начале 20-го века.

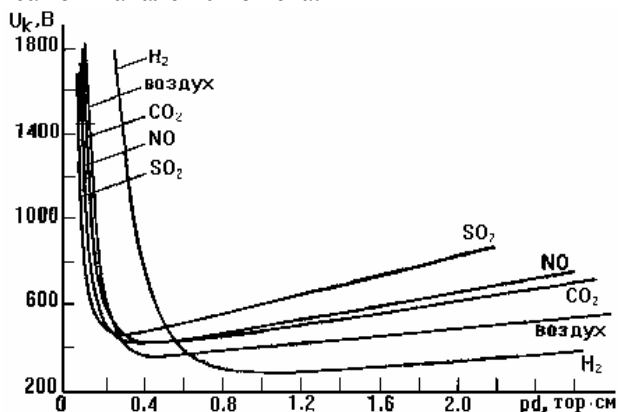


Рис 8.1. Кривые Пашена

## ***Возникновение, развитие и существование разряда во времени и в пространстве***

### 1) Развитие во времени

Очевидно, что реально, помимо рождения в единицу времени на один первичный электрон  $Y_i$  электронов, некое количество электронов одновременно гибнет: а) прилипает к атомам и молекулам с частотой  $Y_a$ , б) диффундирует к стенкам установки с частотой  $Y_d$ , в) рекомбинирует с ионами с коэффициентом рекомбинации  $\beta$ . Обычно рекомбинацию не учитывают, так что условие возникновения и развития разряда:

$$Y_i(E) > Y_d + Y_a, \quad (8.14)$$

а горения стационарного разряда:

$$Y_i(E) = Y_d + Y_a. \quad (8.15)$$

Это так называемый "стационарный критерий пробоя". По определению,  $Y_d = 1/\tau_d$ , где время диффузии  $\tau_d$  зависит от коэффициента диффузии  $D$  и характерная диффузионная длина пробега электронов к стенкам  $\lambda_d$ :  $\tau_d = \lambda_d^2/D$ . Для цилиндра  $1/\lambda_d^2 = (2.4/R)^2 + (\pi/L)^2$  ( $R$  и  $L$  – радиус и длина цилиндра); для параллелепипеда:  $1/\lambda_d^2 = (\pi/L_1)^2 + (\pi/L_2)^2 + (\pi/L_3)^2$  ( $L_1, L_2, L_3$  – линейные размеры параллелепипеда). Из выражений для частоты ионизации (8.13) и условия (8.14) можно составить феноменологическое соотношение баланса для плотности электронов:

$$dn_e/dt = n_e(Y_i(E) - Y_d - Y_a), \quad (8.16)$$

откуда

$$n_e = n_{e0} \exp((Y_i(E) - Y_d - Y_a)t) = n_{e0} \exp(t/\theta), \quad (8.17)$$

где  $\theta$  – постоянная времени лавины. Очевидно, что развиваться лавина может только, если выполняется условие (8.14), и при неограниченном  $t$  лавина может развиваться произвольно долго. Но

есть ситуации, когда  $t$  очень мало (особенно в лазерной искре), тогда необходимо большое превышение рождения электронов над гибелью, т. е. большое электрическое поле  $E$  (а в лазерной искре просто гигантское!). Из обобщенного критерия пробоя (8.17):

$$\theta^{-1}(E(t)) = Y_i(E) - Y_d - Y_a = \ln(n(t)/n_0)/t \quad (8.18)$$

видно, что разряд приходит к стационарному при  $t \rightarrow \infty$ . На самом деле этот переход происходит раньше. Нарастание тока не безгранично, как это должно было быть по теории электронных лавин, а ограничивается объемным зарядом. Так как с ростом последнего при возникновении виртуального катода эффективное расстояние до анода сокращается, то на более короткой длине пролетного промежутка уменьшается вероятность ионизации атомов и молекул газа электронным ударом. В результате разряд переходит к стационарному.

## 2) Развитие в пространстве

Предположим, что из катода вылетел один электрон. В сильном поле прикатодного слоя он быстро наберет энергию, достаточную для ионизации атома (молекулы) газа, после ионизации будет два медленных электрона (и один ион). Электроны также ускорятся, каждый произведет ионизацию - станет их четыре - тоже ускорятся, ионизуют, станет восемь и т.д.- возникает лавина, идет цепной процесс (рис. 8.2).

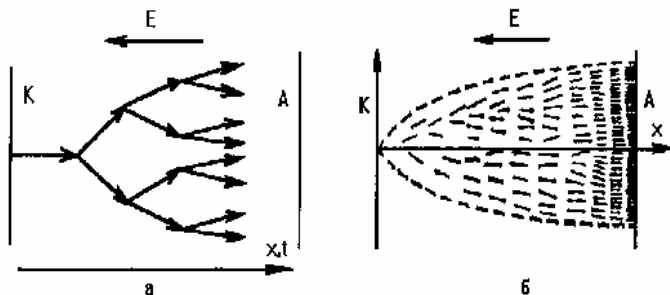


Рис. 8.2. Схемы (а) лавинного размножения электронов в промежутке между катодом К и анодом А и (б) диффузионного расплывания электронной лавины, которая рождается от электрона, вышедшего из определенного места катода



На расстоянии  $x$  первый электрон создаст  $(e^{\alpha x} - 1)$  электронных пар. Возникающие в промежутке электроны дрейфуют к аноду, ионы – к катоду. Приходящие на катод ионы способны выбивать из катода вторичные электроны. Для описания процесса ионно-электронной эмиссии Таунсендом был введен второй коэффициент  $\gamma$ , равный числу вторичных электронов на один приходящий на катод ион (*второй коэффициент Таунсенда*) и зависящий от материала катода, чистоты его поверхности и др., обычно  $\gamma = 10^{-4} \div 10^{-2}$ . Таким образом, ионы пойдут к катоду, ускорятся и выбьют из катода  $\gamma(e^{\alpha x} - 1)$  электронов. Даже если это будет всего один вторичный электрон, то процесс повторится, так что условием горения разряда будет выполнение следующего неравенства:

$$\gamma(e^{\alpha x} - 1) \geq 1. \quad (8.19)$$

Каждый вторичный электрон, в свою очередь, ионизует атомы и рождает электроны  $(e^{\alpha x} - 1)$ . Нетрудно показать, если число первичных электронов  $n_0$ , длина промежутка между катодом и анодом  $d$ , то после суммирования всех вторичных электронов в предположении  $\gamma(e^{\alpha x} - 1) < 1$ , число электронов, приходящих на анод, будет равно:

$$n = n_0 \cdot \frac{\exp(\alpha d)}{1 - \gamma[\exp(\alpha d) - 1]}. \quad (8.20)$$

Величина

$$\mu = \gamma[\exp(\alpha d) - 1] \quad (8.21)$$

называется *коэффициентом ионизационного нарастания*. При  $\mu < 1$  ток будет затухать, условие  $\mu = 1$  является условием перехода к самостоятельному разряду (*условие зажигания разряда*) и условием *стационарности разряда*. Картина упрощена и идеализирована, реально электроны не только гибнут (прилипают, рекомбинируют, диффундируют к стенкам), но и создаются на катоде и не только ионной бомбардировкой. Кроме того,  $\alpha = \text{const}$  только в случае, если  $E = \text{const}$  на всей протяженности  $d$ , в действительности же  $E$  в катодном слое существенно меняется. В конце про-

шлого столетия Таунсенд, проанализировав огромное число опытов, установил экспериментальную зависимость:

$$\alpha/p = A \exp(-Bp/E), \quad (8.22a)$$

где  $A$  и  $B$  постоянные для данного газа и катода,  $p$  - давление,  $E$  - напряженность электрического поля. Такая зависимость может быть качественно объяснена тем, что вероятность пройти электрону без столкновений путь  $\lambda_i$ , на котором электрон набирает необходимую для ионизации энергию, пропорционален  $\exp(-\lambda_i/\bar{\lambda}_{cm})$ . Коэффициент Таунсенда  $\alpha = N \exp(-\lambda_i/\bar{\lambda}_{cm})$ , где  $N = 1/\bar{\lambda}_{cm}$  - число соударений на 1 см пропорциональное давлению:  $N = N_0/p$ ,  $N_0$  - число столкновений электрона на 1 см пути при давлении, равном единице. С учетом того, что  $\lambda_i = U_i/E$ , получим соотношение подобное (8.22a):

$$\alpha/p = N_0 \exp(-N_0 U_i p/E). \quad (8.22б)$$

Подстановка численных значений дает правильный порядок величин  $A$  и  $B$ .

Коэффициенты Таунсенда  $\alpha$  и  $\gamma$  обладают тем свойством, что отношение  $\alpha/p$  и  $\gamma$  не являются функцией по отдельности от напряженности электрического поля  $E$  и давления газа  $p$ , а зависят от их отношения:  $\alpha/p = f_1(E/p)$  и  $\gamma = f_2(E/p)$ . Условие зажигания разряда, или условие, позволяющее определить *напряжение зажигания*  $U_3$ , имеет вид:

$$f_1\left(\frac{U_3}{pd}\right) \left( \exp\left[ f_2\left(\frac{U_3}{pd}\right) \right] - 1 \right) = 1. \quad (8.23)$$

Из (8.23) видно, что напряжение зажигания  $U_3$  является функцией произведения  $pd$ , и при  $pd = const$  напряжение зажигания не меняется. Эта закономерность и носит название «закон Пашена». Кривую Пашена (см. рис. 8.1), отражающую зависимость  $U_3$  от  $pd$ , называют *характеристикой зажигания разряда*. Выражая  $\alpha$  из усло-

вия зажигания разряда ( $\mu = 1$ ) с учетом (8.21) и подставляя в выражение (8.22а), можно получить:

$$E/p = B/(C + \ln(pd)),$$

где  $C = \ln(A/(\ln(1/\gamma+1)))$ . Приняв  $U_3 = Ed$ , найдем зависимость напряжение зажигания от  $pd$ :

$$U_3 = Bpd/(C + \ln(pd)),$$

которая и описывается кривыми Пашена. Важно, что существенны не  $p$ ,  $d$ ,  $E$  по отдельности, а их комбинации:  $pd$  (т.к.  $p = n_g T_g$ , где  $n_g$  и  $T_g$  - плотность и температура газа, если  $T_g = \text{const}$ , то  $pd$  определяет число ионизирующих столкновений на пробеге  $d$ ) и, особенно,  $E/p$ , (т.е. как бы "напряженность поля на одну частицу газа"). Минимум  $U_3$  соответствует  $(pd)_{\min}$  :

$$(pd)_{\min} = (\bar{e}/A)\ln(1/\gamma + 1), \quad (8.24)$$

где  $\bar{e} \approx 2.72$  - не заряд электрона, а основание натурального логарифма. Соответствующее минимальное напряжение зажигания  $U_{3\min} = B(1-C)$  зависит только от сорта газа и материала катода, минимум отношения  $(E/p)_{\min} = B$  зависит только от сорта газа. А.Г.Столетов в конце 19 века, исследуя фотоэлектронную эмиссию, стремился подобрать давление газа для максимального фототока. Он обнаружил, что если уменьшать давление, то сила тока сначала увеличивается, а затем уменьшается, т. е. существует максимум тока по давлению. Если при этом менять от опыта к опыту разность потенциалов между катодом и анодом, то максимум тока всегда соответствует одному и тому же  $E/p$ . Проведя приведенные выше рассуждения, Таунсенд дал объяснение этому экспериментальному факту и назвал это *эффектом Столетова*, а значение  $(E/p)_{\min}$  впоследствии назвали константой Столетова.

Расчеты удовлетворительно совпадают с экспериментальными кривыми Пашена (см. рис.8.1). Описательно кривые Пашена можно понять так: с уменьшением  $(pd)$  медленно растет  $E/p$  (правая ветвь на рис.8.1), значит, растет  $Y_i$  и для пробоя достаточно меньших  $U_3$ ,

и так до  $U_{\text{зmin}}$ . Дальнейшее уменьшение  $pd$  (левая ветвь) приводит к быстрому уходу электронов (мало столкновений) и для компенсации этого необходим быстрый рост  $E/p$ , т.е. потенциала пробоя  $U_3$ .

Можно дать описание этой зависимости при фиксированном значении одной из величин  $p$  или  $d$ . Пусть давление уменьшается при постоянном  $d$ . Тогда с уменьшением давления увеличивается длина свободного пробега, т.е. увеличивается набираемая электроном энергия, а значит, растет  $\alpha$ . При дальнейшем уменьшении  $p$  начинает уже падать число столкновений, что приводит к уменьшению  $\alpha$ . При постоянном давлении с уменьшением расстояния  $d$  увеличивается  $\alpha$ , так как растет электрическое поле. Затем с уменьшением  $d$  коэффициент Таунсенда снижается из-за уменьшения длины развития лавины. Так же описательно можно понять эмпирическую зависимость Таунсенда (8.22) и кривые Пашена (рис.8.1).

### ***Темный (таунсендовский) разряд***

Темный (таунсендовский) разряд – это электрический разряд в газах при низком давлении (порядка нескольких Торр) и очень малых токах (менее  $10^{-5}$  А). Электрическое поле в разрядном промежутке однородно или слабо неоднородно, и не искажается пространственным зарядом, который пренебрежимо мал. Разряд назван по имени Таунсенда, согласно теории электронных лавин которого при условии выполнения развития самостоятельного разряда (8.19) ток разряда должен со временем неограниченно возрастать. Реально же ток ограничен параметрами цепи. Очень малый ток таунсендовского разряда обусловлен большим сопротивлением внешней цепи. Если сопротивление внешней цепи снижать, увеличивая ток, то таунсендовский разряд переходит в тлеющий.

### **§51. Тлеющий разряд**

Тлеющий разряд – это электрический разряд в газе, характеризующийся термодинамической неравновесностью и квазинейтральностью плазмы, возникающей в разряде. Эффективная температура электронов существенно выше температуры газа и электро-

дов. Термоэмиссия практически отсутствует (электроды холодные). Свое название разряд получил из-за наличия около катода так называемого тлеющего свечения. Благодаря свечению газа тлеющий разряд нашел широкое применение в лампах дневного света, различных осветительных приборах и т.п. Классическая схема реализации тлеющего разряда изображена на рис. 8.3, а,б. На рис.8.3,б анодом служит металлическая камера (съемный колпак) плазменно-технологической установки. Колпак может быть и стеклянным,

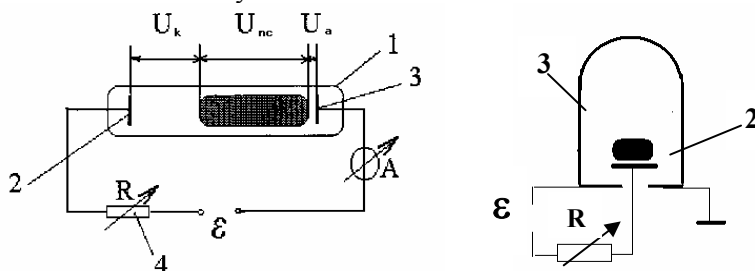


Рис.8.3. Схемы реализации тлеющего разряда: а) в стеклянной трубке, б) в камере технологической установки

тогда анодом может быть сетка или введенный в камеру электрод. Установки последнего типа получили широкое распространение для плазменного нанесения покрытий, травления и для других целей (обычно в составе ВУПа – вакуумного универсального поста). Схема рис.8.3,а применяется для исследования тлеющего разряда. Баллон 1 можно откачать и затем заполнить выбранным газом до заданного давления. Обычно в разряде наблюдаются три визуально различимые области: а) прикатодная область, на ней падает напряжение  $U_k$ , обычно  $200 \div 700$  В; б) положительный столб и в) прианодный слой. Положительный столб в физике тлеющего разряда – пассивный элемент: сближая анод и катод можно ликвидировать положительный столб, разряд будет гореть. В технике же положительный столб – полезный элемент: он светится в рекламных трубках, он и есть активная среда в газовых лазерах, напряжение на нем определяется именно техническими требованиями, например, длиной рекламных трубок. Прианодный слой обычно очень тонкий, состоящий из светящейся "пленки" и тонкого темного участка. Долго считали, что он тоже "пассивный", однако теперь доказано,

что некоторые неустойчивости прямо связаны с ним. Падение напряжения на анодном слое  $U_a$  невелико ( $10 \div 20$  В) и обычно близко к потенциалу ионизации газа (очень чувствительно к состоянию поверхности анода).

### ***Прикатодная область***

Прикатодная область физически наиболее важный элемент тлеющего разряда: именно в нем образуется электронная лавина. В данном газе при данном давлении формируется длина прикатодной области  $d_k$ , равная нескольким длинам ионизации. Установившаяся длина  $d_k$ , обратно пропорциональная давлению  $p$ , такова, чтобы величина  $pd_k$  соответствовала минимальному значению  $U_k$  (природа экономна!). Основной характерной особенностью тлеющего разряда является большое падение потенциала в прикатодной области  $U_k$ . – сотни вольт. Из катодного слоя в положительный столб уходит некоторое количество электронов с такой энергией, чтобы ионизовать в столбе достаточно атомов (молекул) для компенсации теряемых электронов, то есть  $U_k$  должно быть много больше потенциала ионизации атомов газа. Катодная область как бы "приклеена" к поверхности катода. Если проводящей является только одна его поверхность, то при любом повороте катода разряд приходит только на нее - даже если ее повернуть на  $180^\circ$ , как бы спиной к аноду. Свечение катодной области "слоистое" (рис. 8.4). У самого катода находится темное "астроново пространство", связанное с тем, что электроны, вышедшие с катода, еще не набрали достаточной энергии для возбуждения атомов и молекул газа. Затем располагается область катодного свечения, в которой происходит интенсивное возбуждение различных уровней. Катодное темное пространство, возникает там, где энергия ускоренных электронов «переваливает» через значение в максимуме функции возбуждения, сечения возбуждения уменьшаются, количество возбужденных атомов падает. Далее электроны преимущественно ионизируют атомы, происходит лавинообразное размножение электронов, которые, ускоряясь, вновь вызывают возбуждение атомов. Появляется «тлеющее отрицательное свечение», благодаря которому тлеющий разряд и получил свое название. В плазме разряда электрическое поле резко падает, электроны, растрчивая свою энергию, не при-

обретают в слабом поле энергии достаточной для возбуждения атомов, возникает темное "фарадеево пространство". В области тлеющего свечения ( $\rho \approx 0$ ) наиболее идеальная плазма. Так как электрическое поле  $E \approx 0$ , электроны переходят из области тлеющего свечения в фарадеево пространство главным образом за счет диффузии. Ионы попадают в прикатодную область также за счет диффузии. Ускоренные к катоду ионы выбивают вторичные электроны. Темное фарадеево пространство – это переходная область, в которой нет ионизации и возбуждения. По мере приближения к положительному столбу беспорядочное тепловое движение электронов все более преобладает над направленным движением. Описание всех процессов, объясняющих эту "слоистость" (и некоторые более тонкие эффекты) и сейчас является далеко не полным. Непонятно и еще одно явление: площадь токового пятна  $S_{\text{п}}$  на катоде в нормальном режиме всегда определяется из соотношения  $S_{\text{п}} = I/j_{\text{п}}$ , где:  $I$  - полный ток, а  $j_{\text{п}}$  – некоторая «нормальная плотность тока», постоянная для данного разряда. Это важное свойство тлеющего разряда называется *законом нормальной плотности тока*. При увеличении  $I$  (например, при снижении внешнего сопротивления  $R$  или повышении ЭДС источника  $\varepsilon$ )  $S_{\text{п}}$  растет пропорционально току до тех пор, пока токовое пятно не займет всю проводящую поверхность катода (и подводющих голых проводов). При этом катодное падение напряжение  $U_k$  остается постоянным. Дальнейшее повышение  $I$  приводит к росту  $U_k$  - это "аномальный режим" с *аномальным катодным падением потенциала*, а сам разряд переходит к *аномальному тлеющему разряду*. Почему  $j_{\text{п}} = \text{const}$  - остается неизвестным.

### ***Положительный столб***

Если в показанной на рис. 8.3 установке повышать ток, то в какой-то момент загорится разряд, причем между катодной областью и анодом появится свечение с характерным для данного газа спектром излучения и занимающее все сечение трубки. Это и есть положительный столб, причем на нем будет падение напряжения  $U_{\text{пс}} = \varepsilon - IR - U_k - U_a$ . Это единственная область разряда, которая может быть произвольной длины. Положительный столб представляет собой плазму с концентрацией частиц, убывающей от оси

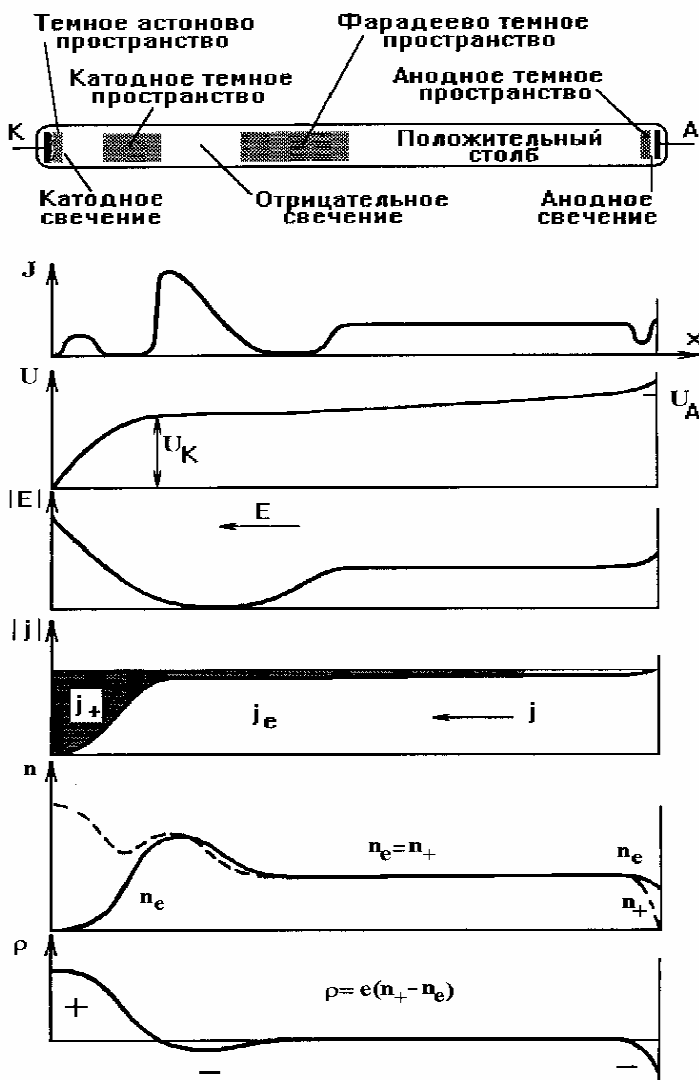


Рис. 8.4. Картина тлеющего разряда в трубке и распределения интенсивности свечения  $J$ , потенциала  $U$ , продольного поля  $E$ , плотностей электронного и ионного токов  $j_e, j_+$ , концентраций  $n_e, n_+$  и объемного заряда  $\rho = e(n_+ - n_e)$



к стенкам, в нем идет интенсивный процесс ионизации и потери частиц на стенки, при этом положительный столб практически не дает ионов в катодную область. Уходящие на стенки электроны заряжают их отрицательно относительно центральной области вблизи оси, и ионы ускоряются на стенку, т. е. происходит амбиполярная диффузия. В итоге, электроны и ионы на стенках рекомбинируют. Наличие радиального градиента приводит к тому, что эквипотенциали имеют выпуклую форму. Особенно отчетливо это видно при возникновении в положительном столбе за счет колебательных процессов стоячих или бегущих страт. Процесс образования положительного столба довольно сложный, хотя его "назначение" – соединить катодный и анодный слои. Столб электрически нейтрален, так что плотности электронов и ионов (однозарядных) равны, а токи, соответственно, сильно различаются. Температура основной массы электронов  $T_e = 1 \div 2$  эВ, а ионов практически равна температуре стенок (ионы быстро обмениваются поступательной энергией с газом), так что положительный столб термодинамически сильно неравновесен. Он очень неравновесен и в ионизационном отношении – для него справедлива формула Эльверта (1.44). Сближая катод и анод, можно ликвидировать положительный столб, но разряд будет гореть. Более того, анодным слоем можно пройти темное фарадеево пространство, но как только он соприкоснется с тлеющим слоем – отрицательное тлеющее свечение разряда погаснет. Сравнительно недавно было доказано, что свечение столба поддерживают относительно быстрые электроны (20 ÷ 30 эВ), ускоренные в катодной области и поступающие из катодного столба в количестве как раз достаточном для компенсации потерь электронов в нем и обеспечения возбуждения газа. В рекламных трубках положительный столб следует за всеми их изгибами, что объясняется образованием поверхностных зарядов на внутренних стенках трубок и появлением соответствующих поперечных электрических полей. Если увеличивать давление, то происходит сжатие положительного шнура, температура и проводимость возрастают, ток растет, вызывая дополнительный разогрев. В результате роста температуры может начаться термическая ионизация и тлеющий разряд может перейти в дуговой. Так как это очень важная неустойчивость, рассмотрим ее механизм, правда, упрощенно.

## Неустойчивости положительного столба

Часто положительный столб "стратифицирован" – состоит из светлых и темных полос, обычно бегущих с такой скоростью, что визуально столб воспринимается сплошным. Это одна из неустойчивостей положительного столба, но не самая неприятная. Наиболее важная – так называемая "контракция" или "шнурование". При некотором предельном значении тока (предел зависит от многих конкретных условий) разряд в трубке собирается в тонкий ярко светящийся шнур, очень похожий на шнур дугового разряда (в англоязычной литературе называют arcing), но это еще не дуга, хотя температура ионов  $T_i$  поднимается до десятых долей электронвольт, так что отрыв  $T_e$  от  $T_i$  существенно уменьшается. Предположим, что флуктуативно произошло местное повышение плотности электронов  $\delta n_e \uparrow$ , как следствие вырастает плотность тока  $\delta j \uparrow$  ( $j = n_e e v$ ), проводимость  $\delta \sigma \uparrow$  ( $\sigma = n_e e^2 / \tau$ ) и энерговыделение  $\delta w \uparrow$  ( $w = j^2 / \sigma$ ). В результате возрастет температура газа  $\delta T_g \uparrow$ , уменьшится его плотность  $\delta n_g \downarrow$  (так как давление  $p_g = n_g T_g$  выравнивается быстро и его можно считать постоянным), возрастает отношение  $\delta E / n_g \uparrow$ , возрастает частота ионизации  $\delta Y_i \uparrow$ , возрастает  $\delta n_e \uparrow$  – цепочка замкнулась:

$$\delta n_e \uparrow \rightarrow \delta j \uparrow \rightarrow \delta w \uparrow \rightarrow \delta T_g \uparrow \rightarrow \delta n_g \downarrow \rightarrow \delta E / n_g \uparrow \rightarrow \delta Y_i \uparrow \rightarrow \delta n_e \uparrow \rightarrow \dots \quad (8.25)$$

идет рост  $j$  и  $T_g$ , образуется шнур. Неустойчивость называют "ионизационно-перегревной" (цепочка может начаться и со случайного локального возрастания температуры газа  $\delta T_g \uparrow$ ).

### Анодный слой

Анодный слой, всегда очень тонкий. Электроны ускоряются к аноду и ионизуют газ. Если ток на анод  $I_a = \frac{1}{4} n_e e \bar{v}_e S$  больше разрядного тока в цепи ( $I_a > I$ ), то анод заряжается отрицательно относительно положительного столба, в противном случае ( $I_a < I$ ) положительно. Следует отметить, что в лазерных средах (при больших  $p$  и  $j$ ) при повышении давления растет анодное падение потен-

циала, но сохраняется нормальная плотность тока, сравнимая с нормальной плотностью тока катода.

### *Газовые лазеры и тлеющий разряд*

Появление газовых лазеров, универсальность их применения и стремление повысить энергосодержание лазерного луча привели к постановке и разрешению многих новых физико-технических проблем. Если использование тлеющего разряда в маломощных лазерах (есть лазеры мощностью в доли милливатта, например, для хирургии глаза с целью приваривания сетчатки) потребовало лишь незначительно изменить конструкцию катода и анода (они стали проводящими кольцами на внутренних концах трубки (рис. 8.5), появились зеркала), то конструкция мощных лазеров стала совершенно иной [41].

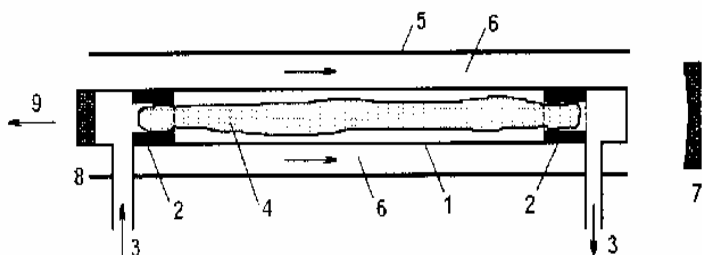


Рис. 8.5. Схема  $\text{CO}_2$  - лазера небольшой мощности с диффузионным охлаждением: 1 – разрядная трубка, 2 – кольцевые электроды, 3 – медленная прокачка лазерной смеси, 4 – разрядная плазма, 5 – внешняя трубка, 6 – охлаждающая проточная вода, 7 – глухое зеркало, 8 – выходящее полупрозрачное зеркало, 9 – выходящее излучение

При температуре активной газовой среды выше  $\sim 450 \div 500\text{K}$  энергия колебательных степеней свободы, обеспечивающих генерацию когерентного излучения, начинает очень быстро переходить в поступательные степени свободы, т.е. в тепло. Следовательно, для недопущения нагрева более чем на 300 градусов нужен очень интенсивный теплоотвод. Теплоотвод из больших объемов за счет теплопроводности газа обеспечить нельзя. Распространение получила идея непрерывной смены газа, появились быстропроточные лазеры, а рабочий объем в них создают две параллельные пласти-

ны, длиной и шириной в несколько десятков сантиметров. Разряд организуют или вдоль потока газа, или перпендикулярно ему (рис. 8.6). Так как в лазерный луч переходит не более 30% вкладываемой в разряд энергии, не менее 70% должен уносить газ, поэтому для мощных лазеров нужны очень большие потоки газа. Расчеты (и опыт) показывают, что в наиболее эффективных  $\text{CO}_2$  лазерах на 10 кВт мощности излучения надо "расходовать" более 80 – 100 г/с. Ясно, что система газоотвода должна быть замкнутая с охлаждением газа (системы прокачки и холодильников): небольшая активная зона "обрастает" огромным вспомогательным, но неизбежным оборудованием.

Вторая особенность – борьба с контракцией: если вместо равномерно светящегося полного объема положительного "столба" образуется один или несколько шнуров с ионной температурой  $T_i$  в десятые доли эВ, то на такой плазме инверсной заселенности колебательных уровней быть не может. Одним из основных методов, применяемых практически во всех мощных лазерах, является разделение катодов таким образом, чтобы через каждый шел ток, меньший, чем нужно для контракции. У каждого катода свое балластное сопротивление  $R$  (см. рис. 8.3), так что если даже на каком-либо из них и будет контракция, то это не существенно: катодов тысячи.

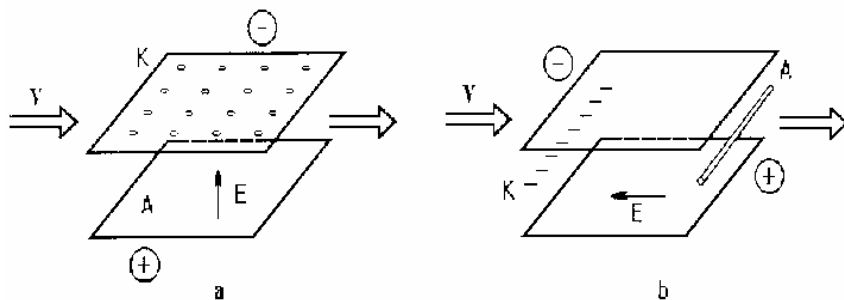


Рис.8.6. Типичная геометрия тлеющего разряда в электроразрядных лазерах на  $\text{CO}_2$ ; а - поперечный разряд (ток идет перпендикулярно газовому потоку направления скорости); верхняя плата усеяна катодными элементами К, нижняя служит анодом А; б - продольный разряд, катодные элементы К расположены вверх по потоку, анодом А служит трубка

Есть и другие методы, например, сделать импульсный разряд несамостоятельным и возбуждать пучком быстрых ( $E \sim 100$  кэВ) электронов, комбинировать постоянные и ВЧ, постоянные и импульсные электрические поля. Применение ВЧ и, особенно, импульсных электрических полей большой напряженности позволило резко увеличить энергоэффективность с единицы рабочего объема активной среды.

### *Разряд с полым катодом*

Такой тип разряда реализуется в полости, когда ее диаметр примерно соответствует длине отрицательного свечения (рис.8.4). Электроны производят эффективную ионизацию за счет осцилляций между катодными падениями потенциала противоположных стенок полости (электростатическое удержание), при этом характерный размер катодной полости должен быть меньше длины свободного пробега электронов. В разряде с полым катодом происходит резкое падение напряжения горения разряда и увеличение его тока (рис.8.7).

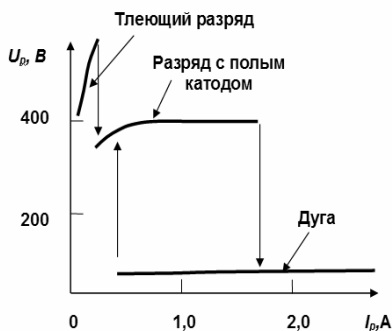


Рис.8.7 Вольт-амперная характеристика разряда с полым катодом в различных областях его существования

Концентрация плазмы в таком разряде может составлять  $10^{10} - 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , а температура — несколько электронвольт. Для разряда с полым катодом оптимальной считается полость, длина которой превышает ее диаметр в 7-10 раз. Разряды с электростатическим удержанием электронов позволяют создать эффективные источники низкотемпературной плазмы большой площади для обработки деталей больших

размеров. Эффект полого катода наблюдается и в микрополостях на поверхности вплоть до атмосферного давления.

## §52. Дуговые разряды

Электрической дугой называют установившийся (или почти установившийся) разряд, который характеризуется низким катодным падением потенциала и высокой плотностью тока на катоде ( $j_k \geq 10 \div 10^2 \text{ А/см}^2$ ). Такие формы разряда известны с 1802г. (Петров В.В.), но ряд особенностей непонятен и до сих пор. Не установилась еще даже общепринятая классификация дуговых разрядов, которые делятся по типу катодов и по давлению рабочего вещества. Так, по типу катода различают: а) подогревные; б) горячие; в) холодные; г) угольные; по давлению: а) низкого давления ( $p \leq 10^{-3} \div 1 \text{ атм}$ ); б) высокого ( $p \sim 1 \div 5 \text{ атм}$ ); г) сверхвысокого ( $p > 10 \text{ атм}$ ). В дуговом разряде можно различить: 1) прикатодный слой – тонкий, падение напряжения порядка потенциала ионизации (бывает даже меньше) атомов газа; 2) положительный столб, состояние и поведение плазмы в котором определяется балансом энергии; (температуры ионов  $T_i$  и электронов  $T_e$  в центральной части столба равны); в) анодный, тоже тонкий слой и тоже с малым падением напряжения на нем.

### *Дуги с подогревным катодом*

Дуги с подогревным катодом это несамостоятельные разряды, используются в основном как выпрямители, управляемые включением - выключением разрядного напряжения (газотроны) или изменением фазового сдвига напряжений анода (или катода) и сетки (тиратроны). В дуге катодный слой только ускоряет электроны термоэмиссии настолько, чтобы они поддерживали нужную ионизацию газа. Образующаяся плазма как бы "приближает" анод к катоду, так что ограничение тока объемным зарядом ("закон 3/2" для вакуумного промежутка) в дуге нет. В результате при напряжении между анодом и катодом 10-20 В ток на порядки больше, чем был бы в вакууме.

### *Дуги с горячими катодами*

Дуги с горячими катодами очень распространены. Они бывают с токами от десятков миллиампер (лампы дневного света) до мега-

ампер (в электролитических ваннах для получения алюминия и магния). Физика прикатодной области горячего дугового разряда не проще прикатодной области тлеющего разряда, да и изучена хуже. Ускоренные непосредственно вблизи катода термоэмиссионные электроны в прикатодной области создают ион-электронные пары. Ионы ускоряются к катоду, поддерживая его высокую температуру, и «производят»  $2 \div 9$  термоэмиссионных электронов на один ион. Производство электронов ионами на катоде через поддержание термоэмиссии энергетически значительно выгоднее, чем прямая ион-электронная эмиссия (как в тлеющем разряде), но возможно только при большой плотности тока. Катодом обычно служит или высокотемпературный металл (часто вольфрам) или расплав металла (ванны при производстве Al, Mg). Несмотря на низкое падение потенциала, электрическое поле около катода в дуге большое, так как плазма поджимает прикатодный слой к поверхности катода. Так, для плотностей тока  $j \sim 10^3 \text{ A/cm}^2$  ток термоэмиссии возрастает за счет эффекта Шоттки в  $\sim 3$  раза ( $E_k \sim 10^6 \text{ В/см}$ ). Однако токи в  $10^8 \text{ A/cm}^2$  объяснить термоэлектронной и автоэлектронной эмиссией катода невозможно, приходится делать предположения о взрывной эмиссии микроострий и о расплавлении поверхности катода и выбросе расплавленного металла в разрядный промежуток с последующей его ионизацией.

### *Дуги с холодными катодами*

Дуги с холодными катодами – это по существу дуги с локальными термоэммитерами: на катоде образуются токовые пятна, причем плотность тока должна быть больше критической (для данного металла), иначе дуга гаснет. Это объясняется необходимостью концентрации энергии для получения электронов с катода. Плотности тока очень большие (у меди до  $10^8 \text{ A/cm}^2$ !), данные опытов сильно различаются, а теоретического описания нет. Пятна хаотически бегают по катоду, попытки упорядочить их движения пока не дали результата. С 1903г. известно, что если пятно поместить в магнитное поле  $H$ , перпендикулярное току  $j$ , то пятно побежит навстречу (!) вектору  $\vec{j} \times \vec{H}$  ...Объяснения до сих пор нет. Нет полного понимания и механизмов электронной эмиссии: если для

средних значений плотности тока ( $j \sim 10^6$  А/см<sup>2</sup>), расчетное поле  $E \sim 10^7$  В/см (у самого катода) - теория и эксперимент примерно совпадают, то ни для малых, ни для самых больших значений  $j$  необходимые для обеспечения соответствующей автоэлектронной эмиссии значения  $E$  оказываются неправдоподобно большими. Иногда пятна останавливаются (бывает надолго), в таком месте идет сильная эрозия (до дыр и прекращения разряда). Широко применяются катоды из ртути в выпрямителях - игнитронах. При падении напряжения ниже потенциала зажигания разряд должен погаснуть (нет тепловой "инерции" горячих катодов), его надо поджигать. Для этого вводят специальный дополнительный анод-"игнатор", напряжение на который подают с нужным сдвигом по фазе. Каждый соответствующий полупериод в соответствующем игнитроне создаются "затравочные" пары ртути, инициирующие разряд. По терминологии [33] игнитрон, пожалуй, надо отнести к "вакуумным дугам" – без паров металла катода разряд не горит. "Вакуумные" дуги горят всегда с участием паров материала катода и имеют возрастающую вольт-амперную характеристику (ВАХ) (обычно ВАХ падающая).

### ***Положительный столб дугового разряда***

Положительный столб дугового разряда сильно зависит от рода газа, давления, силы тока. При малых давлениях ( $p \leq 0.1$  атм) и силе тока ( $I \sim 1$  А) столб неравновесен ( $T_e > T_i$ ) и сильно напоминает контрагированный шнур тлеющего разряда.

Плазма паров металла, молекулярных газов, при давлении  $p \geq 1$  атм всегда равновесна, характерное распределение (по радиусу столба) температуры и проводимости представлено на рис. 8.8.

При обычном распределении тока температура будет иметь колокообразную форму, равномерно уменьшаясь от  $T \sim (10 \div 12) \cdot 10^3$  К в центре до температуры стенки. Плотность электронов по радиусу спадает очень быстро – в равновесной плазме  $n_e \sim \exp(-r/r_0)$  (а с ней и проводимость ( $\sigma \sim n_e$ )), так что токопроводящий канал сосредоточен у оси. На радиусе, большем  $r_0$  (рис. 8.7), проводимостью плазмы можно пренебречь. Однако связать



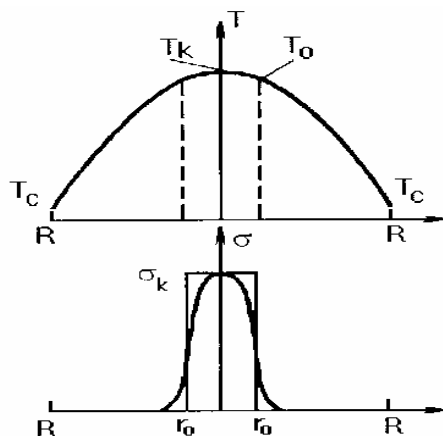


Рис. 8.8. Схематические распределения  $T$  и проводимости  $\sigma$  по радиусу столба дуги. Штриховая линия - замена  $\sigma(r)$  ступенькой в «канальной» модели

количественно ток  $I$ , радиусы  $r_0$  и  $R$ , мощность  $w$  удалось Штенбеку, только введя принцип минимума мощности "min  $w$ ".

При заданном токе  $I$  и радиусе  $R$  устанавливается такое значение  $r_0$ , при котором выделяющаяся в разряде мощность была бы минимальной (позже доказали, что принцип "min  $w$ " справедлив не всегда, но в дуге справедлив). Существенно, что максимальная температура  $T_k$  (см. рис.8.8) весьма слабо зависит от охлаждения дуги (важен только теплоотвод от катода) и растет с вкладываемой мощностью несколько медленнее, чем корень квадратный из мощности. При высоком давлении ( $p \geq 10$  атм) и высокой температуре ( $T \geq 12000\text{K}$ ) очень существенным оказывается охлаждение излучением, оно уносит до 90% мощности. В последние годы высокий световой КПД дуг высокого давления широко используют для освещения дорог.

### Область анода

Область анода так же, как и прикатодная, весьма тонкая, падение напряжения на ней зависит от режима работы анода, а их два. Первый режим - диффузный имеет место при большой площади

анода и плотности тока  $j \leq 10^2 \text{ А/см}^2$ , ток распределен по всему аноду и падение напряжения очень мало ( $1 \div 3 \text{ В}$ ) (и даже бывает отрицательным). Второй режим: если площадь анода мала (ток выходит на края и т.д.), то при некотором токе (зависит от многих причин) ток собирается в пятно (или пятна) с плотностью  $j = 10^2 \text{ А/см}^2$ . Анодные пятна образуют правильные геометрические фигуры (!), иногда бегают, но тоже по упорядоченным траекториям (круги, овалы,...). Механизмы неизвестны.

### *Зажигание дуги*

Зажигание дуги можно произвести, соединяя электроды (основные или вспомогательные, как в игнитроне), а затем разъединяя их. Процесс зажигания дуги при размыкании цепи (при разъединении электродов) объясняется локальным разогревом электродов вследствие возникновения между ними плохого контакта, когда из-за большого сопротивления происходит нагрев места контакта до термоэмиссии и разряд зажигается. Такой же процесс происходит и при размыкании тока в сильноточных выключателях с образованием вредных дуг, которые выжигают электроды. Другой способ образования дуги – это ионизация в межэлектродном промежутке при подаче повышенного напряжения и выбор формы электродов, способствующей разряду (обычно острие). Если в тлеющем разряде увеличивать силу тока (путем снижения внешнего сопротивления или повышая ЭДС источника  $\mathcal{E}$ ), то при большой силе тока напряжение на электродах трубки начинает падать, разряд быстро развивается, превращаясь в дуговой. В большинстве случаев переход осуществляется скачком и нередко ведет к короткому замыканию.

### *Угольная дуга*

Угольная дуга исторически известна с 1802 г., изучена, пожалуй, лучше всех других, причем конкретно в воздухе. Дуговые светильники, свеча Яблочкова, первые сварки, наваривание металлов велись с угольными дугами. Но у них был большой недостаток: один из электродов сгорал быстрее другого. Был изобретен ряд устройств, регулирующих подачу углей, их выпускала промышленность. Но в середине 19-го века Яблочков предложил перейти от постоянного тока к переменному: у генераторов заменить коллектор на токосъемные кольца. Ток будет менять знак, угли будут гореть одинаково. С этого момента "борьба" постоянного тока (он и до сих пор нужен очень многим потребителям –

от электричек при больших  $I$ , до электроники – при малых  $I$ ) с переменным (его можно транспортировать, значит, строить мощные электростанции, что выгоднее) продолжалась примерно до 20-х гг. XX в. Конечно, победил переменный.

Плазма угольной дуги в атмосфере равновесная, хотя по ее длине температура меняется более чем в два раза (от 12000 до ~ 5000K). Катодное падение снижается вплоть до 10 В (!), анодное тоже порядка 10 В, остальное (несколько вольт) приходится на положительный столб. ВАХ до определенного значения тока падающая, затем напряжение скачком уменьшается, возникает шипение («шипящая дуга»), и ВАХ становится горизонтальной. Интересно, что катод ( $T_k \approx 3500$  K) холоднее анода ( $T_a \approx 4200$  K).

## §53. Искровой и коронный, ВЧ- и СВЧ- разряды

### *Искровой разряд*

Искровой разряд принципиально импульсный, его изучали и до появления источников тока: трением заряжали конденсаторы ("лейденские банки"), собирали атмосферное электричество в предгрозовых условиях. В России в XVIII в. работали М.В. Ломоносов и Г. Рихман, в Америке В. Франклин. Он предложил первое объяснение электрическим явлениям: электричество – "невесомая жидкость" (вроде "теплорода"), ее избыток – знак (+), недостаток – знак (-). Если соединить их проводником, то (+) потечет к (-)... Так, в электротехнике ток и до сих пор течет от (+) к (-)!.. Реальное изучение очень быстропротекающих искровых разрядов стало возможно с появлением камер Вильсона, приборов скоростного фотографирования, катодных осциллографов. Оказалось, что искра может загораться в плотном (давление порядка атмосферы и больше) газе при большой напряженности электрического поля. Первичная лавина быстро поляризуется – электроны отходят в сторону анода, а ионы практически стоят. При образовании лавины происходит много возбуждений с быстрым высвечиванием, фотоэффект создает новые электроны, новые лавины вблизи основной, они втягиваются в основную лавину, растет ее объединенный заряд, растет создаваемое им электрическое поле  $E$ . Когда поле  $E$  примерно станет равным внешнему  $E_0$ , возникает тонкий проводящий канал – стример, соединяющий электроды (стример может быть направлен к любому электроду или сразу к обоим). Скорость распространения

стримеров (более  $10^8$  см/с) гораздо больше скорости распространения электронных лавин, определяемой подвижностью электронов. Таким образом, для развития стримера необходимо выполнение двух условий: 1) поле лавины сравнивается с внешним полем ( $E \sim E_0$ ); 2) излучение переднего фронта лавины достаточно для фотоионизации нужного количества атомов газа. Собственно стример слабопроводящий, но перед самым замыканием межэлектродного промежутка вдоль него проходит волна скачка потенциала, образуется хорошо проводящий канал, и уже по нему проходит большой ток – собственно искра. Газ в канале сильно нагревается, возникает скачок давления – звуковая волна (в молнии – гром). (Изложение весьма упрощенное, но более аккуратное намного длиннее, а полной ясности все равно нет...). Если межэлектродное расстояние большое, поле  $E$  неоднородное, на конце стримера может образоваться хорошо проводящий участок – лидер (рис. 8.9), что характерно для молний, где последовательно образуется несколько лидеров, по существу, несколько разрядов с временными сдвигами в десятки миллисекунд. Искровой разряд получил применение в промышленности, это так называемый "электроэрозионный" способ обработки металлов. Искровой разряд в вакууме (*вакуумная искра*) обычно реализуется с помощью специального поджигающего электрода. В таком разряде удобно анализировать элементный состав электродов по излучению плазмы, образующейся в парах электрода, для этого такой разряд широко используется. Более подробно об искровом разряде см. в работе [34].

В *низкоиндуктивной вакуумной искре* в парах материала электрода происходит пинчевание и образуются «горячие точки» микронных размеров с экстремальными параметрами плазмы ( $T_e > 2$  кэВ, плотность вплоть до  $n \sim 10^{20}$  см<sup>-3</sup>!). Установки с подобными разрядами могут использоваться как импульсные источники высокоэнергетических квантов и частиц: быстрых ионов, ультрафиолетового и рентгеновского излучения.

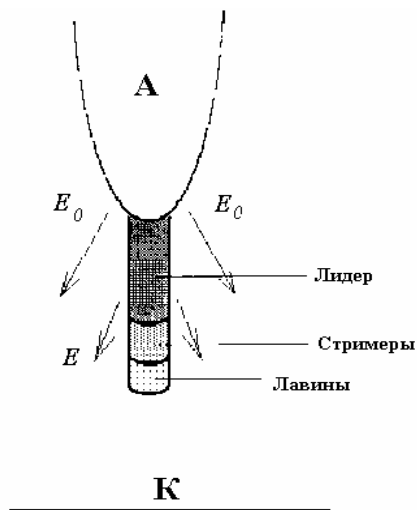


Рис. 8.9. Схема лидера, прорастающего от положительного острия по пути, проложенному стримерами, которые, в свою очередь, втягивают лавины

### ***Коронный разряд***

Коронный разряд – самостоятельный разряд, который возникает только при условии очень большой неоднородности электрического поля хотя бы у одного из электродов (острие – плоскость, нить – плоскость, две нити, нить в цилиндре большого радиуса и т.д.). Условия возникновения и развития короны – различные при разной полярности "острия" (назовем так электрод, вблизи которого  $E$  сильно неоднородно). Если острие – катод (корона "отрицательная"), то зажигание короны по существу происходит так же, как в тлеющем разряде, только для определения первого коэффициента Таунсенда  $\alpha$  (так как поле  $E$  сильно неоднородное) в воздухе (практически важный случай) надо учитывать прилипание (наличие кислорода), так что

$$\int_0^{x_1} (\alpha(x) - a_n(x)) dx = \ln(1 + \gamma^{-1}), \quad (8.26)$$

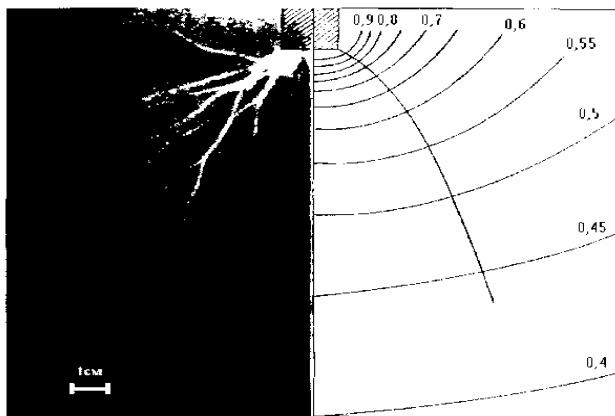


Рис. 8.10. Стример от положительного стержня диаметром 2 см, расположенного на расстоянии 150 см от плоскости при постоянном напряжении 125 кВ, справа – расчет, проведены эквипотенциальные поверхности, цифры около кривых – доли от приложенного напряжения, отсчитанные от плоскости; слева – фотография. стримеров в тех же условиях

где  $\alpha_n$  – коэффициент прилипания,  $x_1$  – расстояние до точки, в которой  $E$  уже так мало, что ионизация не происходит:  $E \approx 0$ . В такой короне есть свечение только до расстояния, тоже примерно, равного  $x_1$ . Если "острие" – анод (корона "положительная"), то картина существенно меняется: около острия наблюдаются светящиеся нити, как бы разбегающиеся от острия (рис. 8.10). Вероятно, это стримеры от лавин, зарожденных в объеме фотоэлектронами. Очевидно, что и критерий зажигания другой – такой, как для образования стримера. В любом коронном разряде существенна неоднородность  $E$ , которая зависит от конкретной геометрии электродов.

Полной ясности в механизме горения разряда нет, но это не мешает применению коронных разрядов в промышленности (электрофильтры); в счетчиках Гейгера-Мюллера тоже работает коронный разряд. Но он бывает и вреден, например, на высоковольтных линиях электропередачи (ЛЭП) коронные разряды создают заметные потери. Короны бывают прерывистыми с различными частотами – у положительных до  $10^4$  Гц, у отрицательных – до  $10^6$  Гц – а это радиодиапазон, помехи.

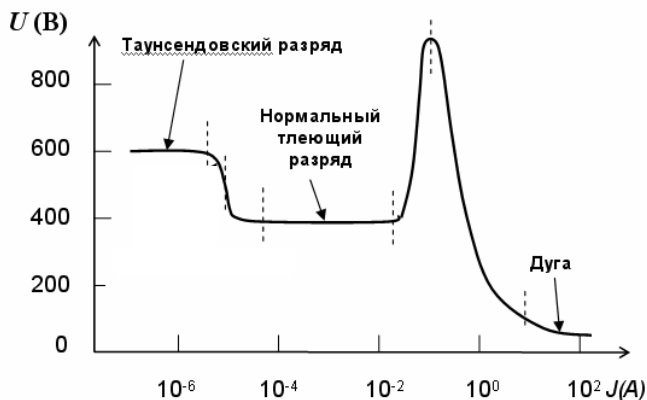


Рис.8.11 Вольт-амперная характеристика самостоятельного разряда в постоянном электрическом поле

Механизм прерывистости разряда у положительной короны, видимо, связан с тем, что электроны стримеров втягиваются в анод, положительные остовы экранируют анод, новые стримеры не могут создаваться, пока остовы не уйдут к катоду. Тогда анод "откроется" и картина повторится. Для отрицательной короны существенно наличие в воздухе кислорода – немного отойдя от короны электроны прилипают к кислороду, отрицательные ионы экранируют острие, и пока они не уйдут к аноду, разряд прекращается. После ухода ионов разряд возникнет вновь и картина повторяется. Прежде чем перейти к разрядам в постоянном магнитном и переменных электромагнитных полях, приведем сводную вольт-амперную характеристику разрядов в постоянном электрическом поле (рис.8.11).

### **Высокочастотные (ВЧ) разряды**

В ВЧ-диапазоне ( $10^{-1} \div 10^2$  МГц) принято различать  $\tilde{E}$  и  $\tilde{H}$  типы разрядов – по определяющему вектору электромагнитного поля. В лазерной технике  $\tilde{E}$  (емкостные) разряды создают, помещая рабочий объем в конденсатор, к пластинам которого подводят ВЧ-напряжение (пластины иногда прямо вводят в объем, иногда изолируют диэлектриком – обычно стеклом). Мощности этих раз-

рядов небольшие (их задача поддержать ионизацию), но напряженности  $\tilde{E}$  велики – до десятков килоэлектрон-вольт.

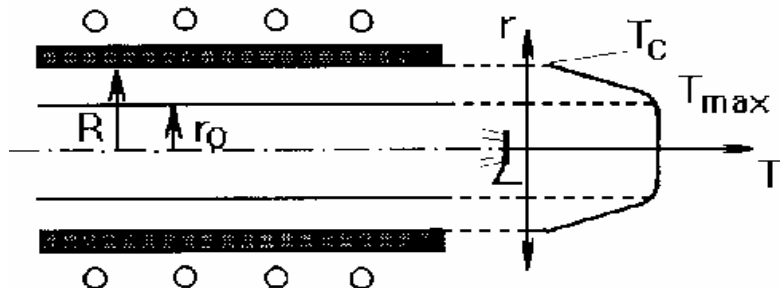


Рис. 8.12. Индукционный разряд в трубке радиусом  $R$ , вставленной в длинный соленоид;  $r_0$  – радиус плазмы, справа – распределение температуры по радиусу

ВЧ индукционные поля ( $\tilde{H}$ -полей) стали широко применяться уже с конца 1940-х годов, в основном, в ВЧ-печах. Везде, где нужно чистое тепло и есть проводящая среда,  $\tilde{H}$  поля незаменимы. Это и производство полупроводниковых материалов, и зонная плавка чистых металлов, и сверхчистые химические соединения и даже бытовые печи. Правда, в этих устройствах почти нет необходимости согласования генератора и нагрузки – соотношение реактивного и активного сопротивлений нагрузки меняется мало. А вот в разрядах дело сложнее: изменение параметров среды разряда (сопротивление, самоиндукция, взаимоиנדукция – связь с индуктором) могут меняться в широких пределах. Обычно индуктор – катушка (бывает и один виток!), внутри которой и происходит разряд (рис. 8.12). Такие разряды часто называют *разрядами с индуктивно связанной плазмой*.

Переменное  $\tilde{H}$  поле направлено вдоль оси катушки, поле  $\tilde{E}$  аксиально к ней. Для поддержания разряда нужное значение  $\tilde{E}$  существенно меньше, чем для его зажигания. Поэтому обычно в объем вводят тонкий металлический электрод, он разогревается, дает термоэлектроны (иногда частично испаряется), инициирует



разряд, после чего его удаляют. Во время работы мощность вводится потоком электромагнитной энергии:

$$\langle S \rangle = (c/4\pi) \langle EH \rangle, \quad (8.27)$$

а отводится чаще всего потоком газа (он ионизируется и уносит энергию). Но электромагнитная энергия проникает в плазму (проводник) на глубину  $x$ , спадая по экспоненте  $\exp(-x/\delta)$ , где  $\delta$  – скин-слой, и его условились считать глубиной проникновения потока:

$$\delta^2 = c^2 / (2\pi \hat{\sigma} \omega), \quad (8.28)$$

где  $c$  – скорость света,  $\hat{\sigma}$  – проводимость проводника,  $\omega$  – частота ВЧ поля.

Очевидно, режим работы установки зависит от соотношения  $R$  и величины  $\delta$ . Если  $\delta < R$ , то энергия поглощается в слое толщиной  $\delta$ , образуя проводящий цилиндр. Распределение по радиусу температуры  $T$  и проводимости  $\hat{\sigma}$  представлены на рис. 8.13, по существу, это полный аналог канальной модели дуги, ее называют "моделью металлического цилиндра". Следует отметить, что реально можно управлять давлением  $p$  (желательно делать его побольше!) и потоком  $\langle EH \rangle$ , определяемым ампер-витками:  $\langle EH \rangle \sim IN$  (где  $I$  – ток,  $N$  – число витков на единицу длины индуктора).

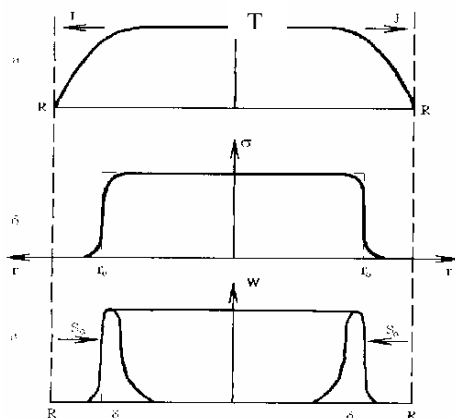


Рис. 8.13. Схематические распределения по радиусу температуры (а), проводимости (б) и джоулева тепла (в) в индукционном разряде; штриховая линия – замена  $\sigma(r)$  ступенькой в модели металлического цилиндра,  $J$  – тепловой поток,  $S_0$  – поток электромагнитной энергии,  $\delta$  – толщина скин-слоя

энергии [35]. Одна из схем СВЧ-разряда приведена на рис. 8.14.

Следует отметить, что в схеме (рис. 8.14) почти вся мощность поглощается в струе газа (превращающейся в плазму): внешняя поверхность столба плазмы и внутренняя поверхность волновода образуют коаксиальную линию для электромагнитной волны – энергия в столб втекает по радиусу (как в ВЧ-разряде). Интересно отметить, что механизм пробоя в СВЧ (но не ВЧ!) диапазоне похож на механизм пробоя в тлеющем разряде (образование лавин, стационарный критерий пробоя по формуле (8.19), кривые зависимости  $E = f(p)$  – аналоги кривых Пашена, сравнимость пороговых значений  $E/p$ ), о нем подробно можно прочитать в [33].

Широкое распространение получил СВЧ разряд в магнитном поле. Поглощение энергии электромагнитной волны на частоте электронного циклотронного резонанса (ЭЦР) позволяет сравнительно легко создавать плазму в *безэлектродном ЭЦР разряде*. Так, для частоты 2,45 ГГц резонанс происходит в поле  $B = 875$  Гс. Генерация плазмы возможна при очень низком давлении газа, что позволяет применять такой разряд для прецизионного травления в микроэлектронике. Так как температура ионов очень мала, а при низких давлениях ионы имеют очень большую длину пробега, то они попадают на находящийся под отрицательным потенциалом электрод без столкновений с энергией, точно соответствующей этому потенциалу. Концентрация плазмы в ЭЦР разряде не очень велика  $\sim 10^{11} - 10^{12} \text{ см}^{-3}$ .

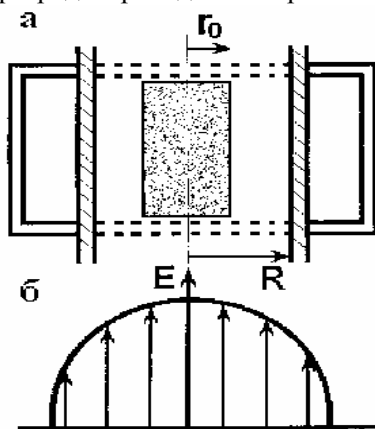


Рис. 8.14. Схема разряда в волноводе, поддерживаемого  $H_{01}$  волной: а) сечение волновода диаметральной плоскостью трубки, плазма затенена; б) распределение  $E$  вдоль широкой стенки волновода

## *Оптический пробой*

Оптический пробой – лазерная искра, самый молодой вид газового разряда. Впервые наблюдался в 1963 г. в фокусе луча гигантского рубинового лазера с мощностью 30 МВт длительностью импульса  $3 \cdot 10^{-4}$  с, в электрическом поле  $E \approx 6 \cdot 10^6$  В/см. Явление было неоднозначным, привлекло широкое внимание и уже изучено не хуже других разрядов. К лазерной искре применим нестационарный критерий пробоя (выражение (8.17)), причем роль потерь электронов  $Y_a$  и  $Y_d$  может даже оказаться несущественной – время очень мало, все определяет создание электронов, лавин. Но вот "затравочный" электрон может родиться в результате многофотонного фотоэффекта (по существу квантового явления). Интересно, что есть большое сходство процессов пробоя в оптическом и СВЧ диапазонах – например, расчеты порогов пробоя и сравнение их с экспериментом.

Развитие лазеров и повышение их мощности привело к тому, что еще в 1976 г. у нас смогли зажечь в воздухе "искру" длиной 8 м, а рекордные длины были больше десятка метров. Подробнее о создаваемой лазерами плазме можно прочесть в [49].

### **§54. Разряды в скрещенных E и H полях. Магнетронный разряд**

Магнетронные системы широко используются в настоящее время для нанесения покрытий на подложки большой и малой площади, в том числе для нанесения всевозможных фильтрующих, отражающих, защитных покрытий на стеклах, для изготовления резистивных пленок гибридных микросхем, магнитных пленок, низкоомных контактов, напыления металлических и других пленок на бытовую аппаратуру, корпуса сотовых телефонов и во многих других случаях. Магнетронные системы также нашли широкое применение для плазмохимической обработки, травления и получения новых материалов. Принципиальным в магнетронных системах является наличие скрещенных электрического и магнитного полей. Распыление материала происходит за счет бомбардировки поверхности мишени образующимися в разряде ионами рабочего газа. Распыленные атомы мишени попадают на подложку и осаж-

даются на ее поверхности. Так происходит напыление пленок из материала мишени. Высокая скорость распыления мишени, характерная для этих систем, достигается за счет большой плотности потока ионов, которые возникают благодаря эффективной ионизации рабочего газа удерживаемыми магнитным полем электронами. Пример схемы магнетронного разряда показан на рис. 8.15. Основными элементами устройства являются катод-мишень, анод и магнитная система. В случае использования постоянного магнита силовые линии магнитного поля замыкаются между полюсами магнитной системы. Наличие замкнутого магнитного поля у распыляемой поверхности мишени

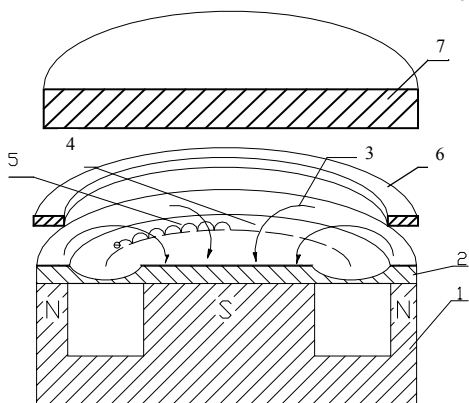


Рис.8.15. Пример схемы магнетронной распылительной системы с постоянным магнитом: 1 – магнитная система; 2 – катод-мишень; 3 – силовая линия магнитного поля; 4 – зона наибольшей эрозии поверхности катода; 5 – траектория движения электрона; 6 – анод; 7 – подложка

позволяет локализовать плазму разряда непосредственно у мишени. Эмитированные с катода под действием ионной бомбардировки электроны (ион-электронная эмиссия) совершают движение по характерным в скрещенных  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  полях траекториям (циклоидам и трохоидам) у поверхности мишени. Электроны оказываются в ловушке, создаваемой, с одной стороны, магнитным полем, возвращающим электроны на катод, а с другой стороны – поверхностью мишени, отталкивающей электроны. Электроны циркулируют в этой ловушке, совершая множество ионизирующих столк-

новений с атомами рабочего газа, в результате каждого из них электрон тратит полученную от электрического поля энергию на ионизацию. В силу не строгой перпендикулярности электрического и магнитного полей электроны будут постепенно дрейфовать к аноду, но большая их часть, прежде чем попасть на анод, много-

кратно ионизируют атомы рабочего газа. Таким образом, наличие магнитного поля увеличивает эффективность процесса ионизации и приводит к росту концентрации положительных ионов у поверхности катода. В результате этого увеличивается интенсивность ионной бомбардировки поверхности мишени, растет скорость ее распыления, а, следовательно, увеличивается и скорость осаждения пленки на подложке. Одним из преимуществ магнетронных распылительных систем является то обстоятельство, что захват вторичных электронов магнитной ловушкой у поверхности мишени препятствует интенсивному перегреву подложки.

Для магнитной системы могут быть использованы электромагниты (рис.8.16), однако это влечет за собой увеличение габаритов, необходимость применения стабилизированного электропитания постоянным током и электрической изоляции в условиях интенсивного водяного охлаждения.

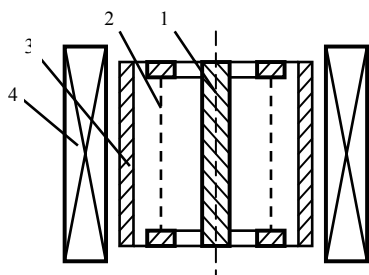


Рис. 8.16. Пример схемы магнетронной распылительной системы с электромагнитом: 1 – катод-мишень; 2 – сетчатый цилиндрический анод; 3 – подложкодержатель; 4 – магнитная система

Поэтому в промышленных условиях применяются постоянные магниты, а электромагниты

- при экспериментальных исследованиях для выбора оптимальной величины магнитного поля применительно к конкретным условиям и конструкции магнетронной распылительной системы.

Напряжение зажигания в магнетронной системе значительно ниже, чем в обычных диодных системах. Это объясняется тем, что еще до наложения электрического поля электроны, всегда присутствующие в рабочей камере и обеспечивающие первые акты ионизации в развитии лавинного пробоя газового промежутка, захватываются магнитной ловушкой. Концентрация электронов около поверхности катода оказывается выше, чем в объеме камеры, что и способствует возникновению разряда при более низких напряжениях. Напряжение за-

жигания падает с увеличением магнитного поля и может быть снижено до 200 В при увеличении магнитного поля до 0,1 Тл. Увеличение магнитного поля позволяет также зажигать магнетронный разряд при более низких давлениях. Система может работать в диапазоне давлений от  $10^{-2}$  до 1 Па и выше. Ток разряда зависит рабочего напряжения, давления рабочего газа, индукции магнитного поля, конфигурации магнетронной системы, распыляемого материала и определяется мощностью источника питания. При давлении  $p = 10^{-5} \div 1$  Тор и магнитном поле  $B = 300 \div 1000$  Гс вольтамперная характеристика хорошо аппроксимируется соотношением  $I = kU^n$ , где  $I$  – ток,  $U$  – напряжение разряда, а  $k$  и  $n$  – постоянные, зависящие от конструкции разрядного устройства, рода газа, давления и величины магнитного поля. Показатель  $n > 1$  сохраняется до величин плотностей тока  $j \leq 0.3$  А/см<sup>2</sup>; напряжение при этом достигает 400 ÷ 600 В. Плотность плазмы в этих условиях составляет  $n_i \cong 10^8 \div 10^{10}$  см<sup>-3</sup> при температуре электронов до  $T_e \cong 20$  эВ. Разряд занимает на катоде узкую область, соответствующую области перпендикулярности электрического и магнитного полей. Преобладающим механизмом эмиссии электронов с катода в стационарном магнетронном разряде является, как и для тлеющего разряда, вторичная ион-электронная эмиссия. Основная ионизация происходит за счет развития электронных лавин, а условием поддержания разряда является условие Таунсенда.

Прикладываемая удельная мощность на единицу поверхности катода составляет от 50 до 100 Вт/см<sup>2</sup>. Скорость распыления и, соответственно, скорость осаждения пленки линейно зависят от приложенной мощности. Необходимая скорость осаждения пленки с достаточной точностью может поддерживаться за счет постоянства таких параметров процесса, как ток разряда или подводимая мощность. Эти функции может выполнять источник питания, благодаря чему, в конечном итоге, управление толщиной пленки достигается подбором времени осаждения.

Одной из основных проблем при работе мощных магнетронных распылительных систем, особенно в режимах реактивного распыления, является дугообразование на катоде. Переход магнетронного разряда в режим дугового характеризуется формированием катодного пятна, падением напряжения на магнетроне до 50 – 100 В и резким ростом тока, определяемым внутренним сопротивлением источника питания. Такая дуга, называемая в англоязычной литературе "жесткой", является устойчивым образованием, поэтому для ее прекраще-

ния необходимо на некоторое время снять напряжение питания с промежутка, чтобы уменьшить эмиссию из катодного пятна до критического уровня. Процесс формирования и развития дуги является быстропротекающим, и скорость реакции системы контроля должна быть высокой. Использование в источниках питания и схемах дугогашения мощных модулей IGBT (биполярных транзисторов с изолированным затвором), имеющих субмикросекундные времена переключения, позволяет решить эту задачу.

На кафедре физики плазмы МИФИ в конце 80-х годов в научной группе под руководством И.К. Фетисова были обнаружены и исследованы новые формы мощных импульсных (квазистационарных) сильноточных разрядов в скрещенных  $E$  и  $H$  полях. Конструкции разрядных устройств представлены на рис.8.17, а характеристики двух форм разрядов (сильноточного магнетронного и сильноточного диффузного) на рис.8.18.

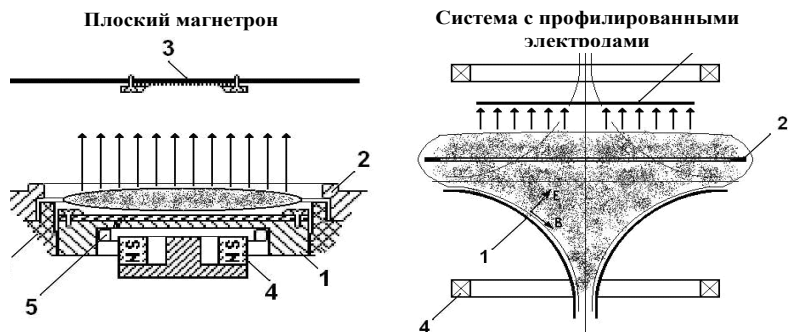


Рис.8.17. Конструкция разрядных устройств: 1 - катод, 2 - анод, 3 - подложка, 4 - магнитная система, 5 - вода, 6 - изолятор

*Сильноточный магнетронный разряд* (2 на рис.8.18) реализуется с наибольшей вероятностью в диапазоне давлений  $10^{-3} \div 10^{-1}$  Тор и магнитных полей с индукцией  $0.4 \div 1.0$  кГс. Напряжение на разряде с ростом тока монотонно увеличивается до некоторого максимального значения  $U_d^{max} \cong 500 \div 1200$  В, после чего он переходит в сильноточный диффузный или дуговой режим при токе до 250 А (при длительности импульса до 20 мс), что соответствует плотности катодного тока  $j \cong 25$  А/см<sup>2</sup>. Уменьшение индукции магнитного поля сопровождается увеличением разрядного напряжения

$U_d^{max}(B_{\perp})$  до некоторого критического значения  $U_d^{kp}$ , зависящего только от материала катода и рода газа. Дальнейшее уменьшение индукции магнитного поля приводит к переходу разряда в высоковольтный режим, характеризующийся крутым ростом ВАХ и малым (до 1 А) значением разрядного тока.

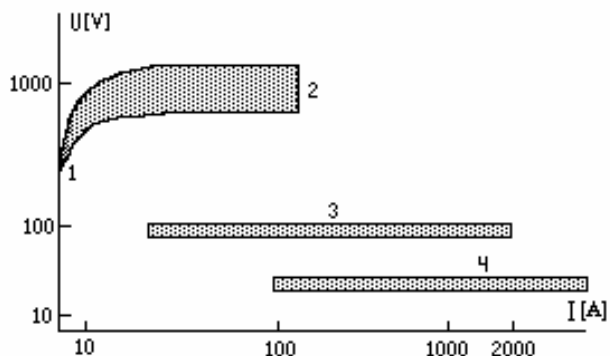


Рис.8.18. Устойчивые формы разряда низкого давления в скрещенных  $E \times H$  полях. 1- стационарный магнетронный разряд, 2- сильноточный магнетронный разряд, 3 -сильноточный диффузный разряд, 4- дуговой разряд

Этот тип разряда аналогично стационарному магнетронному разряду характеризуется Таунсендовским механизмом ионизации в столкновительном катодном слое и преобладанием вторичных механизмов эмиссии.

Особенностью сильноточного магнетронного разряда является интенсивное, за счет высокой энергии и плотности ионного потока, распыление материала катода. Оценки для стандартных технологических условий разряда показали, что плотность плазмы сильноточного магнетронного разряда составляет до  $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , содержание атомов материала катода в плазме может достигать 30 %. Это позволяет получать импульсную скорость нанесения металлических покрытий до 80 мкм/мин, в то время как средние скорости нанесения металлических покрытий в условиях стационарного магнетронного разряда с использованием охлаждаемых катодов составляют  $1 \div 5$  мкм/мин.



*Сильноточный диффузный разряд* (область 3 на рис.8.18) формируется при токах  $10 \div 2000$  А и характеризуется постоянным напряжением горения  $65 \div 140$  В, временем существования порядка 1 мс, а также отсутствием контракции в плазме и катодном слое. Сильноточный диффузный разряд реализуется преимущественно в диапазоне давлений  $10^{-2} \div 5$  Тор независимо от вида разрядного устройства, рода газа, материала катода. Плотность ионов может достигать  $(1.0 \div 1.5) \cdot 10^{15}$  см<sup>-3</sup>, температура электронов составляет  $4 \div 8$  эВ при высокой однородности разряда и отсутствии токовых каналов, а средняя плотность тока сильноточного диффузного разряда достигает 90 А/см<sup>2</sup>.

Структура сильноточного диффузного разряда характеризуется наличием бесстолкновительного катодного слоя и областью плазмы, являющейся активной зоной разряда с преобладанием термического механизма ионизации атомов газа и преобладанием механизма вторичной катодной эмиссии, что отличает его от классического магнетронного и дугового разрядов.

В бесстолкновительном катодном слое происходит непосредственное ускорение эмитированных электронов до энергий, соответствующих катодному падению потенциала. Бесстолкновительный катодный слой отделен от положительного столба промежуточным квазинейтральным слоем, где электроны теряют направленную скорость, а функция распределения электронов по скоростям становится максвелловской. Электроны, энергия которых превосходит энергию ионизации, непосредственно ионизуют газ, а те, у которых энергия недостаточна для ионизации при столкновениях с нейтральными частицами и ионами, производят их нагрев. В результате основными механизмами ионизации являются ионизация ударом электронов, принадлежащих к высокоэнергетической части функции распределения и равновесная термоионизация в атом-атомных и ион-атомных столкновениях.

Спектральные исследования компонентного состава излучения плазмы сильноточного диффузного разряда показали отсутствие в экспериментальном спектре линий элементов, принадлежащих материалу катода, что говорит об отсутствии заметного катодного распыления или испарения материалов электродов. Это указывает на то, что средняя энергия ионов, ускоряемых катодным слоем, оказывается ниже пороговой энергией катодного распыления, а температура поверхности катода как средняя, так и в период протекания импульса тока, ниже температуры испарения.

Сильноточная диффузная форма разряда нашла применение при активации поверхности диэлектриков и в высокоскоростном ионно-стимулированном травлении.

## §55. Плазменно-пучковый и пучково-плазменный разряды

Самостоятельный *плазменно-пучковый разряд* (СППР) – это самостоятельный разряд в сильноточном (0.1 – 10 кА) диоде низкого давления ( $p \approx 10^{-5} - 10^{-3}$  мм.рт.ст.), который возникает из дугового, например, при повышении давления ( $p > 10^{-3}$  мм.рт.ст). Переход от дугового разряда к СППР происходит, когда дуговой разряд не в состоянии перенести весь ток, обеспечиваемый источником питания. При превышении током разряда критического значения

$$I_p > I_{\text{крит}} \approx en_{\text{мин}} \sqrt{\frac{2kT_e}{m_e}} \cdot S, \quad \text{где } n_{\text{мин}} - \text{плотность концентрации}$$

электронов в области минимума плотности плазмы,  $T_e$  – температура электронов плазмы,  $S$  – сечение токового канала, в плазме образуется динамический двойной слой объемного заряда, на котором сосредотачивается практически все приложенное к диоду напряжение  $V_{\text{сл}} \approx V_p$ . Ток разряда становится равным

$$I_p = \frac{1.86}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{V_p^{3/2}}{l_{\text{сл}}^2}, \quad \text{где } l_{\text{сл}} - \text{толщина двойного слоя. В электри-$$

ческом поле двойного слоя  $E_{\text{сл}} \approx V_{\text{сл}} / l_{\text{сл}}$ , толщина которого, как правило, много меньше длины диодного промежутка, происходит встречное ускорение пучков электронов и ионов. Подобно дуговому разряду СППР формируется в условиях возникновения эмиссии с холодного катода катодными пятнами, но отличается от дугового процессами переноса тока и способом нагрева плазмы, обеспечивающим баланс нужного числа носителей. Перенос разрядного тока пучками заряженных частиц и нагрев электронов плазмы до энергий, достаточных для ионизации газа, происходит за счет коллективного пучково-плазменного взаимодействия. СППР это самостоятельный разряд, так как необходимое для разряда число носителей поддерживается исключительно за счет поданного на электроды напряжения.

Различают два характерных типа СППР: К-разряд и М-разряд, которые отличаются как пространственной локализацией двойного слоя, так и условиями возникновения и динамикой поддержания. При К-разряде минимум концентра-

ции плазмы и, соответственно, двойной слой локализован в прикатодной области диода между плотной плазмой катодных пятен ( $10^{15} - 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ) и плазмой диода ( $10^{12} - 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ). Формируемый в двойном слое мощный электронный пучок пронизывает весь разрядный промежуток. В случае М-разряда двойной слой расположен между электродами и его локализация определяется областью с минимумом концентрации плазмы. При этом основной ток разряда переносится пучком электронов только на участке двойной слой – анод. Меняя область минимума концентрации плазмы, можно управлять местоположением слоя, а, следовательно, и местоположением зоны генерации интенсивных пучков заряженных частиц.

СППР применяется для генерации интенсивных пучков электронов и ионов. Для этого диодный промежуток, как правило, помещают в продольное однородное магнитное поле катушек. Генерируемый в двойном слое пучок электронов за счет ионизации создает плазму, которая удерживается в магнитном поле. Номинальный ток в магнитных катушках таких устройств порядка 200 А, при величине магнитного поля  $\sim 600$  Гс. При токе пучка порядка 1 А, энергия электронов пучка составляет 3–4 кэВ. В СППР существует группа горячих электронов с энергиями порядка десятков и даже сотен килэлектрон-вольт, что значительно больше энергии пучка. Высокоэнергетичные электроны, нагретые пучково-плазменными колебаниями, при кулоновском рассеивании и в столкновении со стенками производят рентгеновские кванты. Поэтому СППР может быть использован как генератор интенсивного рентгеновского излучения. В этом случае более предпочтительной является локализация двойного слоя непосредственно у поверхности анода-мишени, что исключает потери энергии электронного пучка на взаимодействие с плазмой. При этом создание градиента концентрации плазмы с минимумом у анода в сильноточных импульсных плазменных диодах возможно как за счет градиента концентрации первичной плазмы, которой предварительно заполняется диодный промежуток, так и за счет градиента давления нейтрального газа вдоль разрядной трубки. Следует отметить, что формирование постоянного градиента давления предполагает, как правило, наличие мощных средств откачки, что в различных практических приложениях зачастую затруднено. Для автономных систем необходимы очень быстрый импульсный напуск рабочего газа с катодной стороны плазменного диода (чтобы кратковременно создать необходимый градиент давления) и интенсивная откачка отработанного газа после гашения разряда.

## Пучково-плазменный разряд

В настоящее время для разработки новых плазменных технологий широко используется эффективный способ ионизации газа электронным пучком, позволяющий получать стационарную низкотемпературную плазму в большом объеме – это *пучково-плазменный разряд* (ППР) в магнитном поле. Особенности ППР:

- сильно неравновесная (энергия электронов плазмы значительно превышает энергию ионов, атомов, молекул) низкотемпературная ( $<10$  эВ) плазма высокой плотности ( $10^{10}-10^{13}$  см<sup>-3</sup>);
- широкий диапазон степени ионизации рабочего вещества: от полной ионизации ( $\alpha=1$ ) до слабо ионизованной плазмы ( $\alpha=10^{-5}$ );
- высокие значения потоков ионов и атомов ( $10^{16}-10^{19}$  см<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>);
- возможность получения стационарной плазмы с высоким энергосодержанием (до 0,5 Вт/см<sup>3</sup>) в большом объеме (несколько десятков литров).

Эти свойства открывают новые технологические возможности, а именно:

- можно работать с разными рабочими веществами (газы, пары металлов), воздух, азот, кислород, водород, метан, углекислый газ, фреон, аргон, литий, кальций и др.;
- плазменной обработке могут подвергаться весьма большие поверхности (диаметром до 0,5 м и длиной до 2 м), детали сложной формы, а также внутренние и внешние поверхности труб;
- при проведении процесса получается плазма с малым содержанием примесей;

Указанные особенности позволяют использовать пучково-плазменный разряд для совершенствования существующих и создания новых плазменных технологий, а именно:

- для разработки высокоинтенсивных источников ионов,
- мощных источников ультрафиолетового излучения;
- для ионно-плазменной модификации поверхностей: имплантации ионов и легирования, упрочнения (азотирования);
- для очистки поверхностей из любых материалов, матирования;
- для травления поверхностей в микроэлектронике (из ППР можно извлекать ионы с энергией 10-100 эВ, оптимальной для бездефектного травления и напыления материалов);

- для нанесения покрытий, в том числе из тугоплавких материалов и покрытий с антикоррозионными свойствами с высокой адгезией;
- для разделения изотопов;
- для получения ультрадисперсных порошков;
- для проведения плазмохимических реакций с высокой эффективностью;

Кроме технологического использования ППР применяется как эффективный генератор СВЧ и рентгеновского излучения, а также для исследования ионосферной и магнитосферной плазмы (электронные пучки инжектируются на высотах  $90 \div 150$  км),

В лабораторных условиях ППР создают с помощью пучка электронов диаметром  $1 - 5$  см с энергией  $0.1-10$  кэВ, током  $10^{-1}-10$  А, проходящего через плазмообразующий газ в вакуумной камере (при давлении в пределах  $10^{-5}-10^{-1}$  мм рт.ст.) с продольным магнитным полем ( $10-10^4$  Гс). Пример такой установки, дополнительно оснащенной модулятором пучка, показан на рис.8.19.

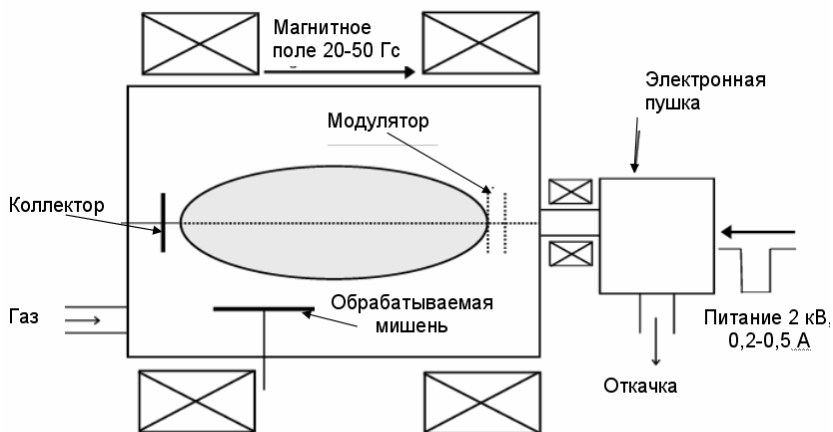


Рис. 8.19. Схема экспериментальной установки с пучково-плазменным разрядом

Пучково-плазменный разряд открыт давно (60-е годы прошлого века), однако, до настоящего времени не существует ясного пони-

мания о процессах в ППР. Возникновение ППР, прежде всего, происходит вследствие развития пучковой неустойчивости в результате чего, происходит возбуждение электронным пучком колебаний и волн в плазме. Поддержание ППР в магнитном поле обусловлено ионизацией газа плазменными электронами, ускоренными в поле высокочастотных колебаний, возбуждаемых электронным пучком в плазме. То что, электронный пучок в ППР имеет сильно "размытую" функцию распределения электронов по продольным скоростям с наличием электронов, имеющих энергию большую энергии инжекции, отмечалось уже в первых экспериментах. В настоящее время известно, что часть электронов пучка (до 10%) ускоряются в ППР до энергий превышающих первичную энергию (в «хвосте» энергетического распределения превышение более чем на порядок). Экспериментально было обнаружено, что большая часть ускоренных электронов движется навстречу пучку. Область локализации высокоэнергетичных электронов «привязана» к максимальной амплитуде возбуждаемых колебаний. Таким образом, плазма ППР, в области взаимодействия, является генератором потоков заряженных частиц. Максимум СВЧ колебаний лежит в области, прилежащей ко входу, через который электронный пучок входит в область взаимодействия. В этой же области регистрируется и рентгеновское излучение из плазмы. Это дает основание предположить, что электроны испытывают сильное рассеяние на возбуждаемых СВЧ полях в плазме, совершая при этом сложные движения, в результате чего их реальный пробег между соударениями оказывается большим. К тому же, существование стационарно пространственно выделенной области рентгеновского излучения, обусловленное торможением на нейтральных атомах и ионах плазмообразующего газа, указывает на их «длительное» в этой области.

Одной из особенностей ППР при выходе в установившийся режим «горения» является смена знака тока, принимаемого коллектором электронного пучка, то есть, токоприемный коллектор принимает нескомпенсированный поток ионов. Причем при удалении от коллектора зонд сначала фиксирует положительный ток, а затем на некотором расстоянии от коллектора на зонде появляется отрицательный ток. Существование локальной области, из которой ускоренные электроны и ионы движутся в противоположном направлении, может свидетельствовать и о формировании двойного слоя.

Основной максимум СВЧ колебаний соответствует резонансной частоте, равной электронно-плазменной частоте ( $\omega_{p1} = \omega_{pe}$ ). Дополнительный максимум соответствует частоте, в два раза больше, чем электронно-циклотронная час-

тота. ( $\omega_{p2}=2\omega_{ce}$ ). Электроны плазмы в поле СВЧ волн этих резонансных частот приобретают энергию и ионизируют газ. Между параметрами плазмы (температура и плотность электронов) и амплитудой СВЧ колебаний наблюдается корреляция. При возбуждении колебаний с первой резонансной частотой  $\omega_{p1}=\omega_{pe}$  отмечается максимальное значение температуры электронов. Максимальному значению плотности и минимальному значению температуры электронов плазмы соответствует вторая резонансная частота  $\omega_{p2}=2\omega_{ce}$ . При увеличении плотности плазмы происходит отстройка от резонанса  $\omega_{p2}=2\omega_{ce}$ . Электроны перестают набирать энергию. Плазма из локализованной области существования ускоренных электронов вытекает к коллектору. Понижение плотности плазмы восстанавливает резонанс, а вместе с этим восстанавливаются и условия для ускорения электронов плазмы. После чего, становится возможной доионизация газа электронами, сопровождающаяся ростом плотности плазмы в ППР. В условиях неоднородной плазмы возбуждаемые электронно-плазменные моды СВЧ колебаний вызывают возбуждение низкочастотных (НЧ) ионных колебаний, роль этого процесса для поддержания разряда является определяющей. Резонанс разрушается при возрастании плотности плазмы с возбуждением НЧ колебаний (ионный звук).

Основной вклад в ионизацию газа дают электроны, ускоренные в области пространства, где сконцентрирована энергия СВЧ волн. Плазма вытекает из этой области со скоростью ионно-звуковых волн. Неоднородность плазмы и нелинейное взаимодействие СВЧ и НЧ волн, возбуждаемых пучком, усиливает НЧ колебания, включая дрейфовые волны. Они обеспечивают аномальную диффузию плазмы поперек магнитного поля. В результате этого плазма занимает объем с радиусом много большим радиуса пучка. Максимальная температура электронов плазмы достигается в условиях возбуждения максимальной амплитуды НЧ колебаний. При этом СВЧ и НЧ колебания становятся нерегулярными. В результате этого электроны в поле ускоряющей волны имеют большую эффективную частоту соударений. СВЧ колебания отдают большую часть своей энергии низкочастотным. В стохастических НЧ полях ускоряются и ионы плазмы. Управление спектром НЧ колебаний позволяет, как это следует из экспериментов регулировать передачу энергии от пучка к ионам плазмы.

Исследованные закономерности явлений в ППР позволяют понять возможности его использования для разработки ПП генератора СВЧ колебаний. В частности, полученные результаты показывают, что использовать возбуждаемые пучком колебания можно в том случае, если осуществлять преобразование колебаний в электромагнитные волны уже в области ввода пучка в плазму. Это можно достичь путем введения участка продольной неоднородности магнитного поля, управления градиентами плотности плазмы и геометрическими размерами плазменного столба ППР разряда.

В рамках существующих нелинейных теорий взаимодействия волн в плазме, развития турбулентности плазмы, в условиях возбуждения собственных плазменных СВЧ колебаний, трудно объяснить два наблюдаемых явления:

- существование стационарной пространственно ограниченной области плазмы, в которой возбуждаются плазменные колебания и осуществляется ускорение электронов плазмы (процессы в этой области определяют в целом характеристики всего плазменного столба ППР)

- ускорение электронов плазмы в направлении противоположном движению электронного пучка, т.е. в направлении противоположном направлению фазовой скорости СВЧ волн, возбуждаемых пучком.



## Глава 9

### УСТРОЙСТВО И РАБОТА ТОКАМАКА

#### § 56. Принцип действия. Принципиальная схема

В заключительной главе подробнее рассмотрим устройство и особенности работы токамака – наиболее сложной, но, пожалуй, и наиболее важной плазменной установки. Именно с токамаком сейчас связывают надежду на практическую реализацию управляемого термоядерного синтеза. Сооружаемый в настоящее время международным сообществом термоядерный реактор-токамак ИТЭР – это решающий шаг на пути создания к середине 21 века термоядерной энергетики. Токмак – название созданной в соответствии с предложением И.Е. Тамма и А.Д. Сахарова в середине прошлого века в Курчатовском институте установки Токовая Камера с Магнитными катушками (Г трансформировали в К при характерном в русском языке смягчении согласных).

Токмак – это трансформатор, вторичной «обмоткой» которого является создаваемый в плазме ток. Магнитная термоизоляция обеспечивается сильным тороидальным магнитным полем  $B_\phi \approx B_t$ , которое вместе с полоидальным полем  $B_\theta \approx B_p$  тока  $I_p$  создает необходимую для подавления тороидального дрейфа плазмы и сохранения устойчивости шнура (§17) винтовую конфигурацию магнитных силовых линий (рис.9.1а). Показанная на рис.9.1 проводящая оболочка (кожух) также служит для *пассивной стабилизации* плазменного шнура при его кратковременных возмущениях (§ 24).

Связь между толщиной кожуха и характерным временем возмущения  $t_{1/2}$ , которое демпфируется возникающими в кожухе при таком изменении магнитного потока токами Фуко, определяется глубиной скин-слоя (§24), которая в практических единицах может быть представлена в виде очень полезной формулы:

$$\delta(\text{см}) \approx 0,3 \sqrt{\frac{\hat{\rho} \cdot t_{1/2}(\text{мс})}{\hat{\rho}_{\text{Cu}20^\circ\text{C}}}}. \quad (9.1)$$

В этой формуле  $\hat{\rho} / \hat{\rho}_{Cu20^{\circ}C}$  – удельное сопротивление материала кожуха, отнесенное к удельному сопротивлению меди при  $20^{\circ}C$ ,  $t_{1/2}$  – полупериод возмущения.

Генерация и поддержание тока в плазме осуществляется с помощью *индуктора*, который при изменении тока в нем создает на тороидальной оси ЭДС  $\mathcal{E} = -d\Psi/dt$ , где  $\Psi$  – магнитный поток внутри плазменного кольца с током. Для электрического пробоя заполняющего камеру газа необходимо значительно большее, чем для поддержания тока, значение  $\mathcal{E}$ , поэтому при создании плазмы ток в обмотках индуктора меняют значительно быстрее, чем в фазе его длительного поддержания. Для того, чтобы поле индуктора не искажало при пробое тороидальное поле, а также необходимую для удержания плазмы винтовую магнитную конфигурацию, используют магнитопроводы из материала с высокой магнитной проницаемостью (магнитомягкое железо), замыкающие магнитный поток вне индуктора. Индуктор может быть с железным сердечником, так и с воздушным – вообще без использования железа. В последнем случае устанавливают полоидальные катушки, которые компенсируют поле индуктора в области плазмы. Равновесие кругового тока в продольном (по отношению к нему) магнитном поле достигается путем приложения дополнительного вертикального магнитного поля  $B_z$ , создающего направленную к оси системы силу (§24). Поле  $B_z$  создается полоидальными *управляющими обмотками* (рис.9.1б). На рис.9.2 показаны основные элементы электромагнитной системы токамака, и циклограмма его работы. Кроме указанных обмоток в токамаках дополнительно устанавливают катушки для обеспечения равновесия плазмы по вертикали и коррекции магнитного поля.

Устойчивость тороидального плазменного шнура, как было показано в §17, возможна лишь при выполнении критерия Крускала – Шафранова  $q = (a/R)(B_t/B_p) > 1$ , для чего ток плазмы  $I_p$  не должен превышать определенного значения. Действительно, связь поля и тока

$$\oint_l H_t dl = 0,4\pi I, \quad (9.2)$$

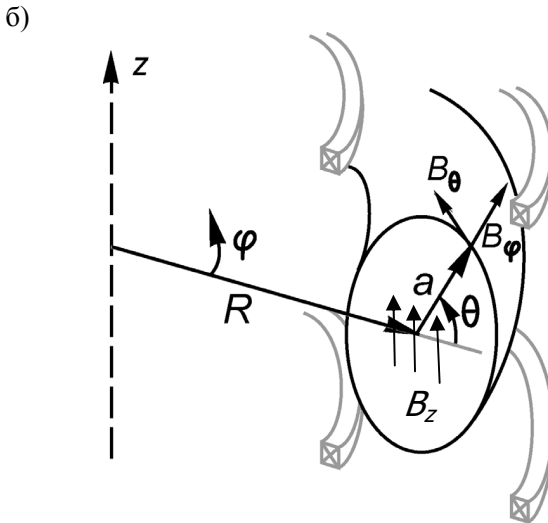
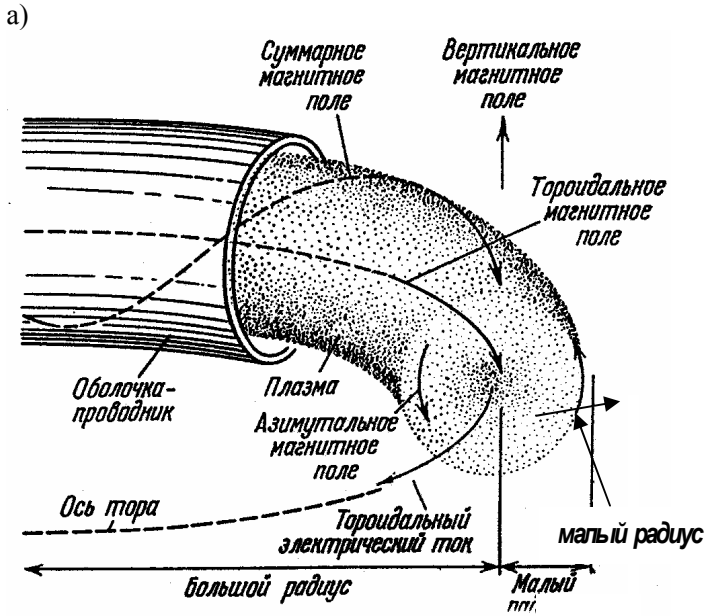


Рис.9.1 Конфигурация магнитного поля в токамаке:  
 а) суперпозиция продольного поля и поля тока в плазме,  
 б) характерные обозначения

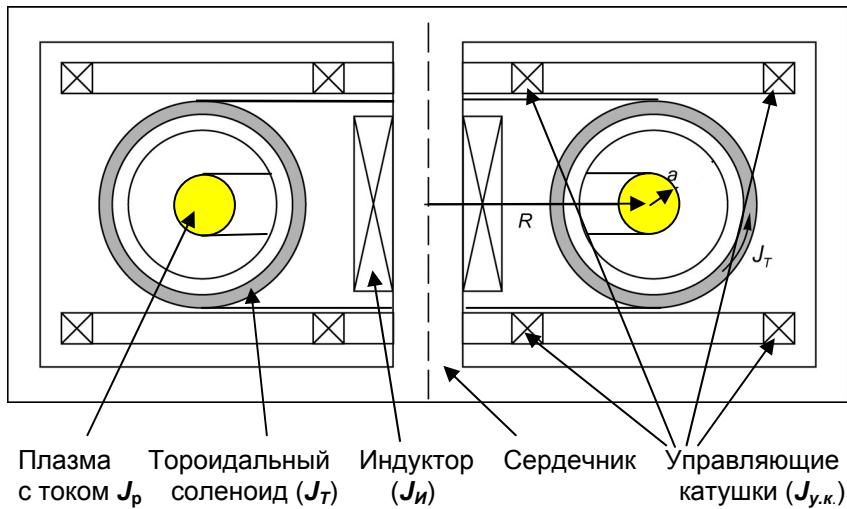


Рис.9.2а. Электромагнитная система токамака

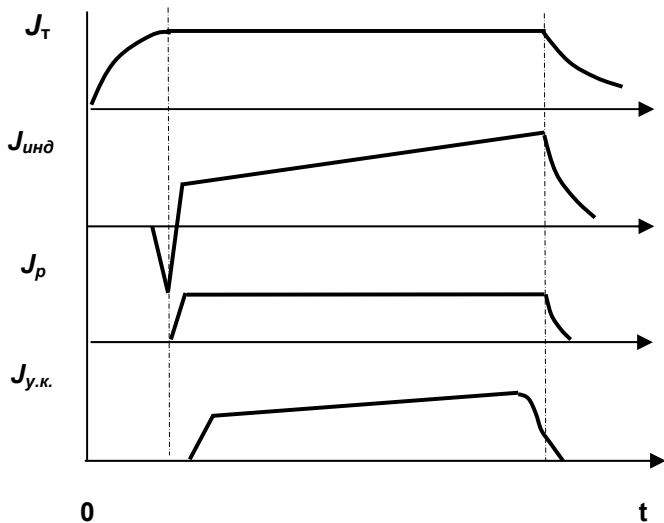


Рис.9.2б. Циклограмма работы токамака (качественно):  $J_T$  – ток в катушках тороидального соленоида,  $J_u$  – ток в обмотке индуктора,  $J_p$  – ток плазмы,  $J_{y.k.}$  – ток в управляющих катушках (увеличивается с ростом  $T$  плазмы)

где  $H_l$ ,  $l$  и  $I$  выражены соответственно в эрстедах, сантиметрах и амперах, в случае аксиальной симметрии ( $H \cdot 2\pi r = 0,4\pi I$ ) дает для поля  $H=0,2I/r$ .

Если у токамака большое *аспектовое отношение*  $A = R/a$ , то в первом приближении полоидальное поле на границе плазменного шнура  $B_p \approx 0,2I_p/a$ , и

$$q = (5a^2/R)(B_p/I_p) > 1. \quad (9.3)$$

Таким образом, существует ограничение на величину тока в плазме. Другие ограничения связаны с плотностью плазмы  $n$ . При малых значениях  $n$  в вихревом поле  $E = \varepsilon/2\pi R$  электроны могут перейти в режим ускорения («уйти в просвист») (см. (§10)). Критической для такого режима концентрация плазмы определяется критерием Разумовой  $n_e \leq 0,07j_p$ , где плотность плазмы в  $[м^{-3}]$ , а плотность тока в  $[МА/м^2]$ . То есть предел по току плазмы линейно зависит от ее концентрации  $I_p \geq (\pi\kappa a^2/0,07)n_e$ . При больших  $n$  также существует предел по плотности  $n_{MH} \leq 2B_p/qR$  (предел Мураками –Хьюгелла), связанный с балансом мощностей в периферийной плазме. При больших плотностях, когда потери плазмы за счет излучения и теплопроводности начинают превышать выделение в ней энергии за счет протекающего по плазме тока, происходит контракция (сжатие) плазменного шнура.

Визуально область рабочих режимов токамака удобно проиллюстрировать так называемой диаграммой Хьюгелла –Мураками (рис.9.3). На ней вместо плотности по оси абсцисс откладывают величину, ей пропорциональную для токамака с заданными большим радиусом плазмы и значением тороидального поля  $M = (R/B_p)n$  (число Мураками). Область 1-2 соответствует пределу Разумовой, связанному с убегающими электронами, область 2-3 определяется магнитогидродинамической (МГД) устойчивостью в соответствии с критерием Крускала–Шафранова, область 3-4 – это предел по плотности Мураками. Энерговыведение в плазме при протекании в ней тока пропорционально  $Q_{OH} \propto I_p^2$ , а потери на излучение  $Q_r \propto n^2_e$ . Из (9.2) следует, что  $Q_{OH} \propto [(B_p/R)q]^2$ , а отношение  $Q_r/Q_{OH} \propto n^2 (R/B_p)^2 q^2 \equiv H^2$ . Число  $H$  называется числом Хьюгелла, при сохранении пропорциональности между энерговыведением и излучением ( $H=const$ )  $q^{-1}$  пропорционально числу Мураками  $M$ . Участок диаграммы 4-1 и отражает эту пропорциональность.

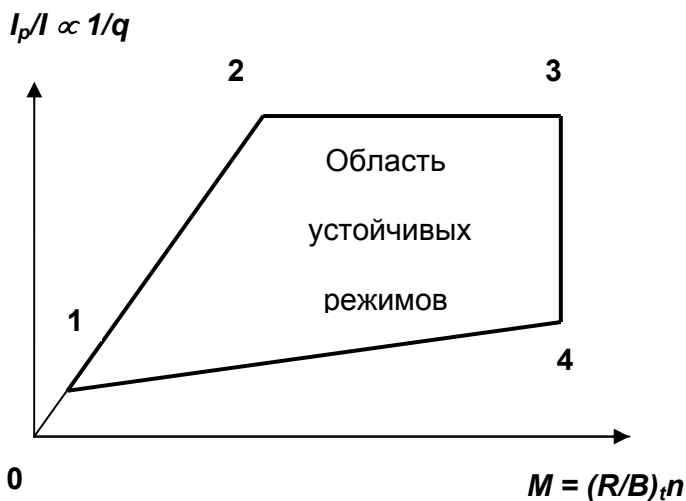


Рис.9.3. Диаграмма Хьюгелла–Мураками устойчивых режимов токамака

При нагреве плазмы возникают проблемы, связанные с МГД равновесием плазменного шнура в токамаке. Из условия равновесия плазмы в МГД приближении суммарное давление плазмы и магнитного поля в шнуре должно уравниваться давлением магнитного поля снаружи от плазменного шнура. С ростом температуры давление плазмы  $\langle P \rangle = nkT$  растет и, соответственно, растет сила  $F_{Rpl}$ , необходимая для удержания на месте этого раздувающегося под внутренним давлением плазменного «баллона». Грубо эта сила может быть оценена из работы по «растяжению баллона»  $W \approx \langle P \rangle 2\pi R \pi a^2$ ,  $F_{Rpl} = -dW/dR = 2\pi^2 a^2 \langle P \rangle$ . Следовательно, с ростом давления плазмы надо увеличивать и удерживающее плазму на радиусе  $R$  вертикальное поле  $B_z$ . Посмотрим, что при этом происходит с суммарным полоидальным полем, которое складывается из поля тока и внешнего вертикального поля  $B_z$ . Допустим, что поле  $B_z$  однородно по  $R$ , тогда в случае для обеспечения равновесия оно должно совпадать с полем тока на его внешней стороне, усиливая это поле. На внутренней же стороне поле  $B_z$  ослабляет поле тока и с ростом давления плазмы возможна ситуация, когда на некотором расстоянии от центра токамака оно скомпенсирует последнее с образованием так называемой *x-точки*. Силовые

линии вне нее разомкнуты. С увеличением давления и, соответственно, необходимого для удержания плазмы поля  $B_z$   $x$ -точка приближается к плазменному шнуру и при  $\beta_\theta = \langle p \rangle / (B_\theta^2 / 8\pi) = R/a$  касается его, что позволяет ей свободно «вытекать» из установки.

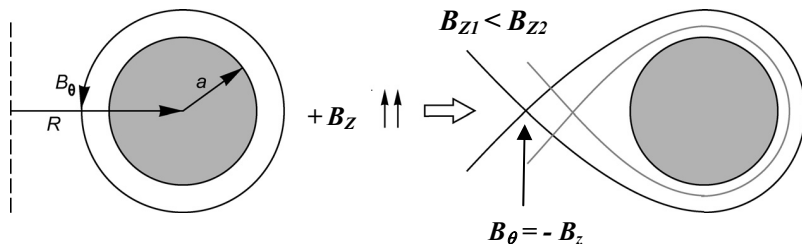


Рис.9.4. Суперпозиция поля тока и вертикального поля, приводящая к возникновению  $x$ -точки

То есть при

$$\beta_\theta < R/a \quad (9.4)$$

удержание невозможно.

Ограничение по полоидальному  $\beta$  приводит к ограничению по полному значению этого параметра в токамаке. Полное  $\beta$  находится из сложения векторов тороидального и полоидального полей и равно

$$\beta = \langle p \rangle / \left( \frac{B_t^2}{8\pi} + \frac{B_p^2}{8\pi} \right).$$

Выражая тороидальное поле через полоидальное и запас устойчивости  $q = (a/R)(B_t/B_\theta)$ , получаем

$$\beta = \frac{\beta_\theta}{1 + q^2 (R/a)^2}.$$

Учитывая выражение (9.4), окончательно имеем:

$$\beta < \frac{(R/a)}{1 + q^2 (R/a)^2}. \quad (9.5)$$

Так как  $A$  и  $q$  больше единицы, то значение  $\beta$  ограничено сверху, например, при  $A = 3$  и  $q = 2$ , что примерно соответствует значениям, закладываемым в проектах термоядерного реактора на основе токамака, согласно выражению (9.5)  $\beta_{max} \approx 0,08$ .

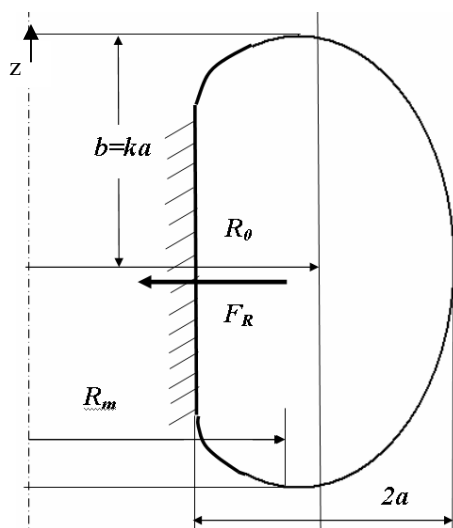
Мы рассматривали токамак с круглым сечением плазмы, однако, если взглянуть на проект реактора ИТЭР (рис.9.14), то видно, что сечение плазмы вытянуто вдоль вертикальной оси. Тому несколько причин. Первая, в тороидальном соленоиде  $D$ -образной формы при той же длине обмотки и, соответственно, мощности питания можно запасти значительно больше энергии магнитного поля, кроме того, такой соленоид выдерживает значительно большие механические нагрузки, возникающие при сильных магнитных полях, чем соленоид с круглыми катушками. Достаточно упомянуть, что при поле 0,5 Тл внутреннее давление со стороны поля на катушки составляет одну избыточную атмосферу. Учитывая, что магнитное давление квадратично зависит от поля (§23), для поля в 5 Тл, которое необходимо для реактора, получаем давление в 100 раз большее. Сила, действующая на единицу длины проводника, выраженная в удобных для практического применения единицах, равна:

$$g = \frac{F[\kappa Гс]}{l[см]} \approx 10^{-7} I[A]B[Гс] \quad (9.6)$$

Из-за того, что поле в тороидальном соленоиде растет к центру  $\propto 1/B_t$  (что легко получается из (9.1)), на различные участки катушки действует разная сила, создающая изгибающий момент относительно точки опоры катушки. Суммарная сила, действующая на катушку (см. рис.9.5), направлена к центру, ее легко оценить из запасенной в объеме  $V$  полной энергии  $W_{маг}$  магнитного поля:  $F_R = -dW_{маг}/dR \approx -(B_0^2/8\pi)V \approx (B_0^2/8\pi)4\pi^2 a^2$ . (Катушку тороидального соленоида можно представить как прижимаемый к внутренней опоре тонкий обруч.) Выполнение условия  $gr_c = const$ , где  $r$  – переменный радиус кривизны катушки, позволяет создать так называемую *безмоментную катушку*, что резко повышает ее прочностные свойства. Одновременно условие  $g(R,z)r_c(R,z)=const$  определяет форму такой катушки, которая и имеет  $D$ -образный вид.



Вытянутое вдоль вертикальной оси сечение плазмы кроме «инженерных» имеет существенные физические преимущества для



повышения параметров удерживаемой плазмы. С увеличением вытянутости  $k=b/a$  (см. рис.9.5) при том же большом радиусе возрастает ток плазмы и время ее удержания. Запас устойчивости для плазмы некруглого сечения  $q(k) \approx q(1+k^2)/2$ , что в соответствии с (9.2) при том же запасе устойчивости позволяет получить большие значения  $I_p$ . Скейлинг или закон подобия, полученный по результатам измерений на многих установках, для энергетического времени жизни  $\tau_E$  дает следующую зависимость от тока и вытянутости плазмы  $\tau_E \propto I_p^{0,9} k^{0,8}$ . Таким образом, увеличение  $k$  с учетом  $q(k)$  приводит к су-

Рис.9.5. Характерные параметры поперечного сечения токамака с вытянутым вдоль оси  $z$  сечением:  $k = b/a$  - вытянутость,  $\delta = (R_0 - R_m)/a$  -треугольность

щественному возрастанию  $\tau_E$ .

Насколько увеличится значение  $\beta$  при переходе к вытянутому сечению можно оценить, если в знаменателе (9.5)  $R/a$  заменить на  $2\pi R/l$ , где  $l$  – длина периметра вытянутого сечения плазмы, которая примерно в  $(1+k)/2$  раз больше длины окружности с радиусом  $a$ .

## § 57. Способы нагрева плазмы

1. Омический (или джоулев) нагрев плазмы происходит при протекании по ней тока. Плотность энерговыведения в единице объема  $P_{OH} = j^2 / \tilde{\sigma}$  или  $P_{OH} = \tilde{\rho} j^2$ , где  $\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{\rho}$  проводимость и удельное сопротивление плазмы соответственно. Для полностью ионизованной плазмы  $\tilde{\sigma}$  определяется формулой Спитцера (1.76,

§10). Многократно ионизированные примеси увеличивают эффективный заряд плазмы:

$$Z_{эфф} = \frac{\sum_k \alpha_k Z_k^2}{\sum_k \alpha_k Z_k}, \quad (9.7)$$

где  $\alpha_k$  – относительная концентрация ионов с зарядом  $k$ . Напомним, удельное сопротивление плазмы:

$$\tilde{\rho}[Ом \cdot м] = \frac{1,65 \cdot 10^{-9} Z_{эфф} \Lambda}{T^{3/2} [кэВ]} \quad (9.8)$$

( $\Lambda$  – кулоновский логарифм, равный примерно 15-20). Из-за наличия в плазме токамака запертых частиц (§20) не все они переносят ток, и сопротивление плазмы оказывается выше, чем по (9.8) в  $\varepsilon$  раз, где  $\varepsilon \approx 2-15$  – степень *аномальности сопротивления* плазмы.

Параметры индуктора, с помощью которого создается напряжение на обходе тора  $U$  и поддерживается ток в плазме  $I_p$ , можно оценить, учитывая, что для поддержания напряжения  $U$  в течение разряда длительностью  $\tau_p$  необходимо обеспечить изменение

магнитного потока через индуктор  $\Delta\Psi_{акт} = \int_0^{\tau_p} U(t)dt$ , а также

$\Delta\Psi_{инд} = LI_p$  для создания тороидального тока  $I_p$  с индуктивностью витка  $L$ . Оценки для самого большого отечественного токамака Т-15 с длительностью разряда 5 с и током 1 МА дают суммарное значение  $\Delta\Psi_{акт} + \Delta\Psi_{инд} \sim 15В \cdot с$ . Причем  $\Delta\Psi_{инд} \gg \Delta\Psi_{акт}$ .

Как уже упоминалось в §10 и видно из (9.8), мощность омического нагрева быстро падает с температурой, и для получения температур выше нескольких (1-2) кэВ необходимо применять дополнительные методы нагрева.

2. Адиабатический нагрев плазмы можно осуществить быстронарастающим магнитным полем. Плазма быстро сжимается без теплообмена, если время нарастания магнитного поля меньше времени проникновения поля в плазму (см. Главу 3) или *скинового времени*  $\tau_{скин}[с] \approx 3 \cdot 10^{-8} a^2 [см] T_e^{3/2} [эВ]$  ( $a$  – радиус плазменного

шнура) и времени удержания энергии  $\tau_E$  в плазме  $\tau_{сж} < \min(\tau_{скин}, \tau_E)$ . Из уравнения адиабаты  $pV^\gamma = const$ , где показатель степени определяется числом  $N$  степеней свободы  $\gamma = (N+2)/N$ , с учетом  $p = nkT$  следует, что

$$T \cdot V^{\gamma-1} = const. \quad (9.9)$$

При трехстороннем сжатии ( $N=3$ ) температура меняется в зависимости от соотношения концентраций до ( $n_1$ ) и после сжатия ( $n_2$ ) по закону  $T_2 = T_1(n_2/n_1)^{3/2}$ .

При сжатии замагниченного плазменного шнура в токамаке из-за того, что время температурной релаксации (см. § 9) меньше времени сжатия, в зависимости от того, происходит ли сжатие по малому радиусу  $a$  ( $N=2$ ) или по большому  $R$  ( $N=1$ ), меняется соответственно поперечная  $w_\perp = mv_\perp^2/2$  или продольная энергия  $\langle w_\parallel \rangle = mv_\parallel^2/2$ . При этом, согласно (9.9),  $w_\perp a^2 = const$  или  $\langle w_\parallel \rangle R = const$ . Из-за вмороженности плазмы в магнитное поле при сжатии сохраняется поток  $\Phi \approx B a^2$ . А так как продольное поле обратно пропорционально большому радиусу  $B_\parallel = B_0 R/R_0$ , то выполняется условие  $a^2/R = const$ . Например, если с помощью управляющих катушек быстро сдвинуть плазменный шнур по большому радиусу внутрь на  $0,2R_0$ , то «продольная температура» возрастет в  $(R_0/R)^2 \sim 1,4$  раза, а «поперечная» в  $(a_0/a)^2 = (R_0/R) \sim 1,2$  раза.

Следует отметить, что при начальном различии  $T_e$  и  $T_i$  адиабатический нагрев сохраняет это различие, ионная и электронная температуры могут сравняться только за счет соударений.

**3. Инжекция пучков быстрых нейтралов** – один из основных методов достижения термоядерных температур. Нейтралы, беспрепятственно пройдя через сильное магнитное поле токамака и превратившись за счет ионизации ионами и электронами плазмы, а также перезарядки (см. §5) в быстрые ионы, передают ионам и электронам основной плазмы свою энергию при торможении в ней.

Необходимую для увеличения температуры плазмы мощность инжектируемого пучка можно оценить из баланса мощностей для единицы объема плазмы (в предположении, что инжектированные нейтралы полностью передают плазме свою энергию):

$$\frac{d(3nkT)}{dt} = \frac{I_0 W_0}{V} - P_{rad} - \frac{3nkT}{\tau_E}, \quad (9.10)$$

где  $I_0$  – поток,  $W_0$  – начальная энергия нейтралов,  $P_{rad}$  – мощность потерь плазмы на излучение, последний член – потери мощности на теплопроводность. Если нагрев происходит намного быстрее, чем плазма теряет свою энергию, то, например, для увеличения температуры от 1 до 10 кэВ за одну секунду в установке масштаба ИТЭР с объемом плазмы  $V \sim 500 \text{ м}^3$  ( $R=6 \text{ м}$  и  $a=2 \text{ м}$ , концентрация плазмы  $n = 10^{20} \text{ м}^{-3}$ ) согласно (9.10) необходима мощность  $\sim 200 \text{ МВт}$ .

Начальная энергия инжектируемых в плазму нейтральных изотопов водорода массой  $M$  при длине их пробега  $\lambda_0$  определяется возможностью достижения ими близких к центру зон установки (при необходимости полного поглощения пучка в плазме) и может быть найдена из соотношения:

$$W_0 [\text{кэВ}] = 180 \cdot n [10^{20} \text{ м}^{-3}] \cdot \lambda_0 [\text{м}] \cdot M [\text{а.е.м.}]. \quad (9.11)$$

При инъекции вдоль большого радиуса установки (перпендикулярная инъекция) достаточно, чтобы  $\lambda_0 \approx a/2$ , при тангенциальной к тороидальной оси тора инъекции проходимый нейтралами путь в плазме значительно возрастает, что ведет к необходимости увеличения энергии частиц. Для реактора ИТЭР необходимая начальная энергия составляет 500 – 1000 кэВ, а суммарная мощность запланирована на уровне 100 МВт. Из этих параметров следует, что суммарный ток инжектируемых нейтралов должен составлять 100–200 эквивалентных ампер. Для токамаков же небольших размеров и меньшей, чем в ИТЭРе, концентрацией плазмы (на которых в настоящее время проводится много исследований для ИТЭР) необходимы энергии в десятки кэВ.

Рассмотрим принципиальную схему инжектора нейтралов (рис.9.6). Быстрые нейтральные атомы можно получить, лишь предварительно ускорив, а затем перезарядив ионы, поэтому инжектор состоит из плазменного источника ионов, ускоряющей и формирующей пучок ионно-оптической системы, камеры перезарядки, а

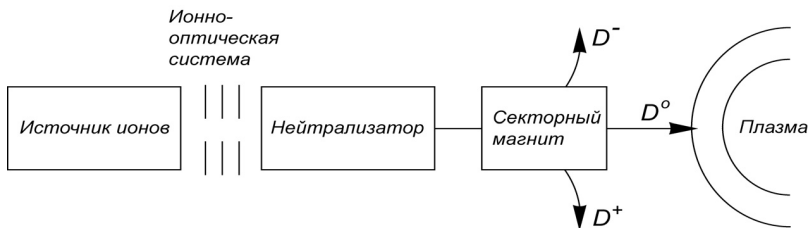


Рис.9.6. Принципиальная схема инжектора нейтральных атомов

также магнита, который убирает из пучка непerezарядившиеся ионы. Для получения нейтралов с энергией ниже  $\sim 150$  кэВ используют положительные ионы, при более высоких энергиях – отрицательные. Это связано с зависимостью сечений захвата и потери электрона ионом водорода от энергии (рис.9.7). Видно, что при

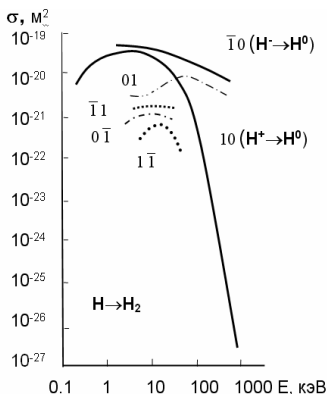


Рис. 9.7. Сечения элементарных процессов, связанных с изменением заряда при соударениях ионов и атомов водорода с его молекулами

больших энергиях сечение потери электрона отрицательно заряженным ионом водорода на несколько порядков превышает сечение захвата электрона протоном, которое резко падет с ростом энергии. Из этого рисунка видно, что при соударениях с молекулами водорода возможны также другие процессы с образованием положительных и отрицательных ионов. Perezарядку осуществляют на неионизованной части рабочего газа, напускаемого в ионный источник и вытекающего в *нейтрализатор*.

Равновесный зарядовый состав в пучке достигается лишь при определенной «толщине» мишени  $\langle nl \rangle > \langle nl \rangle_{равн.}$ . Эту толщину можно найти, рассматривая динамику изменения состава пучка за счет разных процессов. Например, для двухкомпонентного пучка, который содержит лишь две фракции – положительную  $\eta^+$  и нейтральную  $\eta^0$  (так что  $\eta^+ + \eta^0 = 1$ ) и в котором происходят лишь процессы захвата (10) и потери (01) электрона, изменение нейтральной ком-

поненты вдоль направления распространения пучка  $z$  можно описать уравнением

$$\frac{d\eta^0}{dz} = (\eta^+ \sigma_{10} - \eta^0 \sigma_{01})n,$$

решение которого имеет вид:

$$\eta^0 = \frac{\sigma_{10}}{\sigma_{10} + \sigma_{01}} \left[ 1 - \exp \left\{ -(\sigma_{10} + \sigma_{01}) \int_0^z n(z) dz \right\} \right]. \quad (9.12)$$

Для водородного пучка экспоненциальный член становится пренебрежительно малым при  $\langle nl \rangle = \int_0^z n(z) dz \gg 2 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-2}$ . Сум-

марная эффективность преобразования различных ионов водорода в нейтральные атомы (после достижения равновесного состава в водородной мишени) для первичных отрицательных ионов водорода в диапазоне до 1 МэВ остается достаточно высокой (~80%), в то время как при использовании первичных положительно заряженных ионов она становится менее 50% уже при энергии 100 кэВ, а при энергии в 1 МэВ оказывается пренебрежимо малой. При извлечении из источника положительных ионов следует иметь в виду, что наряду с дейтронами из источника извлекаются и молекулярные ионы  $D_2^+$  и  $D_3^+$ , которые после ускорения потенциалом  $W_0/e$  и диссоциации при соударениях в газовой мишени нейтрализатора дают частицы с энергией  $W_0/2$  и  $W_0/3$ . Элементарные сечения (см. рис.9.7) зависят от относительной скорости сталкивающихся частиц, поэтому для повышения эффективности преобразования в нейтралы иногда используют первичные молекулярные ионы водорода, для которых в соответствии с их скоростью при том же ускоряющем потенциале  $\eta^0$  оказывается выше.

Для генерации необходимых при нагреве плазмы больших токов весьма эффективные ионные источники типа дуоплазматрон (§41, рис.5.13) уже не годятся. Дело в том, что при извлечении из газоразрядной плазмы ионов, с одной стороны, плотность ионного тока растет с уменьшением расстояния  $d$  между границей плазмы и ускоряющим электродом (для плоской границы) по закону Чайлда–Ленгмюра (6.3), а с другой стороны, при уменьшении этого промежутка уменьшается напряжение пробоя  $U_{np} = 80d^{0.8}$ . Поэтому существует ограничение на плотность извлекаемого тока ( $j_{max} \sim$

0,7А/см<sup>2</sup> при  $U \sim 20$  кВ и  $j_{max} \leq 0,3$  А/см<sup>2</sup> при  $U \geq 100$  кВ). В связи с этим площадь эмиссии ионов в источниках для инжекторов нейтралов должна быть достаточно большой. Ионно-оптическая система таких источников представляет собой довольно сложный элемент с множеством изготовленных в виде сеток щелевых или круговых электродов, извлекающих и фокусирующих в один общий пучок узкие ионные пучки.

Конструкции источников отрицательных и положительных ионов отличаются, так как концентрация тех или других ионов зависит от параметров плазмы, а также из-за необходимости в источниках отрицательных ионов подавлять ток электронов.

Большие ионные токи и, соответственно, большие потоки сопутствующего газа (газовая эффективность плазменных источников подобного типа  $\eta_{газ} \approx 0,3-0,4$ ), создают проблему откачки нейтрального газа во избежание его попадания в камеру токамака. Оценка необходимой скорости откачки  $S_{отк}$  при допустимом в инжекторе давлении  $p \sim 5 \cdot 10^{-4}$  Па и газовом потоке  $\Gamma \sim 10^{20}$  с<sup>-1</sup>, определяемым током частиц  $I = I_{эжв}/e$  ( $\Gamma \sim I_{эжв}/\eta_{газ}$ ), приводит к необходимости обеспечить  $S_{отк} \sim 10^3$  м<sup>3</sup>/с ( $S_{отк} = \Gamma kT/p$ ,  $k = 1,39 \cdot 10^{-23}$  Па·м<sup>3</sup>/К). Даже применение наиболее эффективных криогенных насосов с удельной быстротой откачки  $\sim 100$  м<sup>3</sup>/(м<sup>2</sup>с) приводит к необходимости разместить их на площади  $\sim 100$  м<sup>2</sup>. Поэтому инжекторы нейтралов представляют собой довольно внушительные сооружения, включающие в себя несколько ионных источников, систему криогенной откачки, большой сепарирующий электромагнит, системы съема энергии мощных ионных пучков и их мониторинга. К токамаку инжектор подсоединяется через большой затвор.

4. ВЧ методы нагрева основаны на поглощении электромагнитной энергии в плазме при реализации одного из резонансов (глава 4). В замагниченной плазме таких резонансов довольно много, поэтому широк спектр частот, используемых для нагрева плазмы в токамаке (см. таб.9.1). Наиболее широко применяется нагрев на частоте ионного циклотронного резонанса (ИЦР), на нижнегибридной частоте (НГ) и на частоте электронного циклотронного резонанса (ЭЦР). Для транспортировки электромагнитной энергии в СВЧ диапазоне ( $\lambda < 30$  см) используются волноводы с поперечными размерами  $\sim \lambda$  или  $> \lambda$ .

В мегагерцовом диапазоне длин волн применяются коаксиальные кабели. Источником энергии для ЭЦР нагрева служат *гиротроны*, в них электроны, двигаясь по искривленным траекториям в магнитном поле короткого прямого соленоида излучают на частоте, соответствующей вращению по ларморовскому (гирос) радиусу. Поэтому магнитное поле в гиротроне соответствует полю в установке. Обычно соленоид гиротрона делают сверхпроводящим. Вакуумная часть волновода отделяется от токамака керамической вставкой, для фокусировки излучения в заданную часть токамака используют металлические зеркала.

5. Системы дополнительного нагрева плазмы пучками нейтральных атомов и электромагнитным излучением могут быть также использованы для *безындукционного поддержания тока*. Помимо создаваемого индуктором вихревого поля ток в токамаке может поддерживаться за счет *тока увлечения* (current drive) и за счет так называемого *бутстреп-тока* (bootstrap). При тангенциальной инжекции нейтралов величину тока увлечения  $I_{CD}$ , создающегося при их превращении в ионы, можно оценить из поглощенной в плазме мощности инжекции  $P_{aux}$  и энергии частиц  $I_{CD} = eP_{aux}/W_0$ , а также времени  $\tau$  их торможения  $I_{CD} = e \cdot N_{CD} / \tau$ . Учитывая зависимость  $\tau$  от начальной энергии частиц  $W_0$ , температуры и концентрации плазмы, получают:

$$Ш_{CB} = \propto \frac{P_{aux} T_e}{nR} \quad \text{или} \quad Ш_{CB}(A) = \gamma_{CB} \frac{P_{aux}(Bm)}{n(10^{20} \text{ м}^{-3})R(\text{м})}, \quad (9.13)$$

где  $\gamma_{CD}$  – эффективность генерации тока.

Генерация тока увлечения при вводе дополнительной мощности реализована на многих токамаках. Экстраполяция на параметры ИТЭР (см. §57) для разных методов введения мощности дает значения  $\gamma_{CD}$  в диапазоне 0,2-0,4 (0,4 при тангенциальной инжекции нейтралов и ~0,2 при ЭЦР).



Таблица 9.1 \*

Метод нагрева	Круговая частота	Циклическая частота $f = \omega/2\pi$ , длина волны $\lambda$ *)
Электронный циклотронный резонанс (ЭЦР)	$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e c}$	$f(\text{ГГц}) \approx 28B$  $\sim 150 \text{ ГГц}$  2 мм
Верхнегибридный резонанс (ВГР)	$\omega_{ВГР} = \sqrt{(\omega_p^2 + \omega_{ce}^2)}$	$f(\text{ГГц}) \approx 28B(1 + 10^{-19}n/B^2)$  166 ГГц 1,8 мм
Нижнегибридный резонанс (НГР)	$\omega_{НГР} = \frac{\omega_{pi}\omega_{ce}}{\sqrt{\omega_{ce}^2 + \omega_p^2}}$	$f(\text{ГГц}) \approx 0,15n^{1/2}(1 + 10^{-19}n/B^2)^{-1,2}$  $\sim 2 \text{ ГГц}$ 15 см
Ионно-циклотронный резонанс (ИЦР)	$\omega_{ci} = \frac{eB}{M_i c}$	$f(\text{ГГц}) \approx 15B \cdot Z/M_i (\text{а.е.м.})$ $\sim 50 \text{ МГц}$ 6 м
Ионно-звуковой резонанс (альфвеновские волны с $v = v_a$ )	$\omega_a = k_{  } \cdot v_a$ $v_a = \frac{B}{\sqrt{4\pi n M_i}}$	$v_a(\text{м/с}) = 2,2 \cdot 10^{16} B(nM_i)^{-1/2}$ $\sim 2 \text{ МГц}$ 150 м

\* Частоты  $f$  и длины волн указаны для дейтериевой плазмы с концентрацией  $n=10^{20} \text{ м}^{-3}$  и магнитным полем  $B=5 \text{ Тл}$ , в выражениях для  $f$  поле указано в Тл,  $Z$  – заряд иона, масса  $M_i$  – в атомных единицах массы.

Бутстреп-ток образуется из особенностей неоклассического переноса частиц в тороидальном магнитном поле (§ 20). Из-за того,

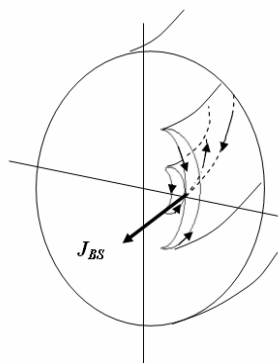


Рис.9.8. К механизму генерации бутстреп-тока

что концентрация плазмы в центре больше, чем на периферии, плотность электронов на внутренних банановых траекториях (см. рис.2.16) больше, чем на внешних, в результате возникает разница в величине тока электронов на внешней стороне внутреннего банана и противоположно направленного тока на внутренней стороне внешнего банана (рис.9.8). Суммарная продольная (вдоль тороидальной оси) составляющая этого тока и создает бутстреп-ток. Таким образом, его величина зависит от радиального профиля распределения давления плазмы и тока.

Для наиболее распространенного параболического распределения давления бутстреп-ток равен:

$$I_{BS} = \left[ (0,6 - 0,7) \beta_p \sqrt{\frac{a}{R}} \right] I_p \quad (9.14)$$

Для ИТЭР ( $\beta_p = 0,8$ ,  $A=R/a=3$ ) бутстреп-ток должен составлять чуть более четверти полного тока плазмы.

## § 58. Удаление тепла и частиц, подпитка топливом

Плазма теряет энергию за счет теплопроводности и излучаемого плазмой электромагнитного излучения, а частицы за счет их диффузии поперек магнитного поля (§20). Мощность потерь энергии за счет теплопроводности  $P_T$  определяется временем удержания энергии  $\tau_E$ :  $P_T = \langle 3nkT \rangle V / \tau_E$ , а поток частиц из плазмы на стенки  $\Gamma = N / \tau_c$  – временем удержания самих частиц  $\tau_c$ .

Мощность потерь на излучение  $P_r$  зависит как от скорости излучательных процессов, так и от длины поглощения в плазме соответствующих длин волн. Если в холодной плазме преимущественно излучают возбужденные атомы, то по мере роста температуры начинает преобладать излучение, вызванное фоторекомбинацией

свободных электронов с заселением дискретных уровней атомов и ионов. Мощность такого излучения падает с ростом температуры (§6).

При высокой температуре основным каналом потерь энергии становится *тормозное излучение* (1.42). Его удельная мощность

$$P_r^{\text{торм}}[\text{Вт/м}^3] = 1.7 \cdot 10^{-38} Z^2 n_e n_i [\text{м}^{-3}] T_e^{1/2} [\text{эВ}]. \quad (9.15)$$

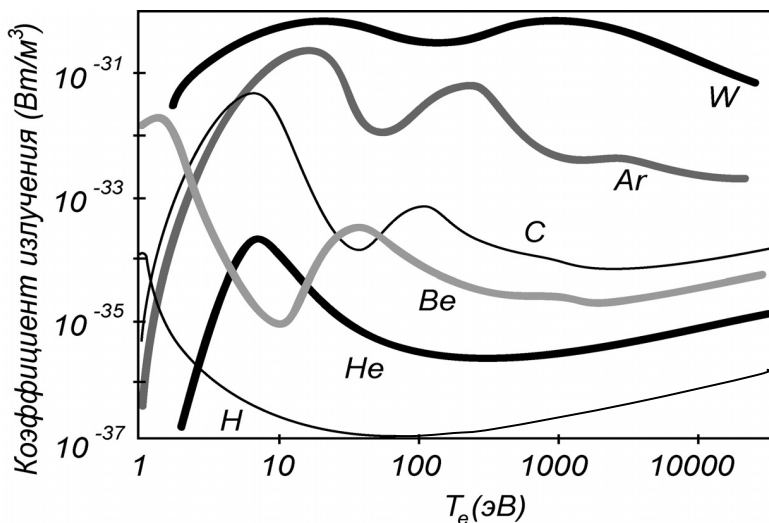


Рис. 9.9. Удельная мощность излучения примесей различных элементов в плазме при корональном равновесии

Для водорода тормозное излучение характерно для  $T_e > 100$  эВ. Для более тяжелых элементов интегральная по различным процессам, включая девозбуждение, фото и диэлектронную рекомбинацию, зависимость мощности излучения от температуры имеет немонотонный характер с максимумами и минимумами, отличающимися по интенсивности на несколько порядков по величине (рис.9.9). При характерной для токамаков концентрации плазмы  $n_e < 10^{19} - 10^{20} \text{ м}^{-3}$  мощность излучения единицы объема  $P_r$  с концентрацией ионной компоненты определенного элемента  $n_i$  может быть определена по приведенному на рис.9.9 коэффициенту излучения данного элемента  $K_i(T)$   $P_r = n_e n_i K_i(T)$ .

Вне условий, соответствующих корональному равновесию, мощность потерь энергии на излучение может на порядки по величине быть больше (это, например, возможно для лития в периферийной зоне токамаков).

В установках с сильным магнитным полем при больших температурах в энергобалансе плазмы заметную роль может играть синхротронное излучение.

При рассмотрении энергобаланса термоядерной плазмы с DT реакцией (при  $n_D = n_T = n/2$ )

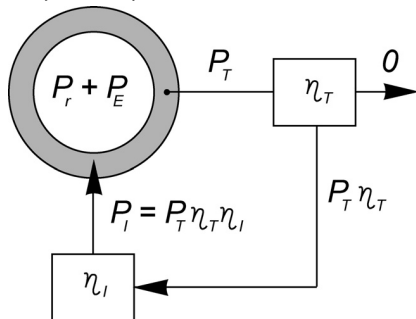
$$\frac{d(3nkT)}{dt} = (n^2/4) < \sigma_{TD} v > E_\alpha - P_{rad} - \frac{3nkT}{\tau_E} + P_{aux}, \quad (9.16)$$

где первый член в правой части соответствует нагреву  $\alpha$ -частицами, выделяющимися в термоядерной реакции, а последний – суммарной мощности нагрева единицы объема за счет всех источников дополнительного нагрева, основными каналами потерь энергии полагают именно тормозное излучение и теплопроводность.

На основании (9.16) можно получить необходимые для реализации в установке с магнитным удержанием управляемого термоядерного синтеза параметры плазмы в виде предложенного в 1957 г. *критерия Лоусона*. Этот критерий соответствует условию, при котором выделяющейся в реакторе энергии достаточно на поддержание работы самого реактора. В этом случае тепловая мощность  $P_{TR}$  реактора, как попадающая из плазмы на стенки, так и выделяющаяся в окружающем плазму *бланкете*, преобразуется с эффективностью  $\eta_T$  в электрическую энергию полностью идет на компенсацию энергетических потерь плазмы с помощью инжектора (с эффективностью  $\eta_I$ )  $P_{TR}\eta_T\eta_I = P_{rR} + P_{ER}$ . В *нуль-мерном приближении*, когда полагают, что параметры плазмы в установке не зависят от координат, выражения для реакторных мощностей с точностью до множителя, равного объему плазмы  $V$ , совпадают с выражениями для удельных мощностей (например,  $P_{rR} + P_{ER} = V(P_r + P_E)$ , в связи с чем на рис.9.10 для упрощения использованы менее громоздкие обозначения). Поэтому соотношение для баланса мощностей в стационарном случае записывается в виде:

$$\{[(n^2/4) < \sigma_{DT} v >] (E_\alpha + ME_n) + P_r + P_E\} \eta_T \eta_I = P_r + P_E. \quad (9.17)$$

В отличие от (9.16) полная тепловая мощность реактора увеличивается за счет преобразуемой в бланкете с коэффициентом  $M$  энергии термоядерных нейтронов  $E_n$ . Для DT реакции  $E_\alpha = 3,5$  МэВ,  $E_n = 14,1$  МэВ, в зависимости от типа бланкета  $M=1, 1,2$  или  $M \sim 7$



(для бланкета, с нерадиоактивным  $^{238}\text{U}$ , который под действием термоядерных нейтронов превращается в  $^{239}\text{Pu}$ , выделяющий при делении примерно в 7 раз больше энергии, чем у первичного DT нейтрона). Полагая в

Рис. 9. 10. Циркуляция мощности в ТЯР, соответствующая критерию Лоусона

соответствии с (9.15)  $P_r = Cn^2 \sqrt{kT} \equiv n^2 f_r$  и  $\langle \sigma_{DT} v \rangle \equiv f_{DT}$  и преобразуя (9.17), получаем соотношение между

концентрацией плазмы, временем удержания в ней энергии и ее температурой в виде:

$$n \tau_E = \frac{3kT(1 - \eta_T \eta_L)}{(f_{DT} / 4)[E_\alpha + ME_n] \eta_T \eta_L + (\eta_T \eta_L - 1) f_r}. \quad (9.18)$$

Полагая коэффициент теплового преобразования  $\eta_T = 0,4$ , а КПД инжектора  $\eta_L = 0,8$ , имеем  $\eta_T \eta_L = 0,32 \approx 1/3$ , что позволяет записать (9.18) в виде

$$n \tau_E = \frac{3kT}{(1/8)[E_\alpha + ME_n] f_{DT} + f_r}. \quad (9.19)$$

Графическое представление этой функции ( $M=1,2$ ) приведено на рис.9.11, где использована аналитическая аппроксимация зависимости скорости DT реакции синтеза от температуры:

$$f_{DT}(\text{M}^3\text{c}^{-1}) \approx 3,76 \cdot 10^{-16} \exp\left[-\frac{200}{T^{1/3}}\right] / T^{2/3}. \quad (9.20)$$

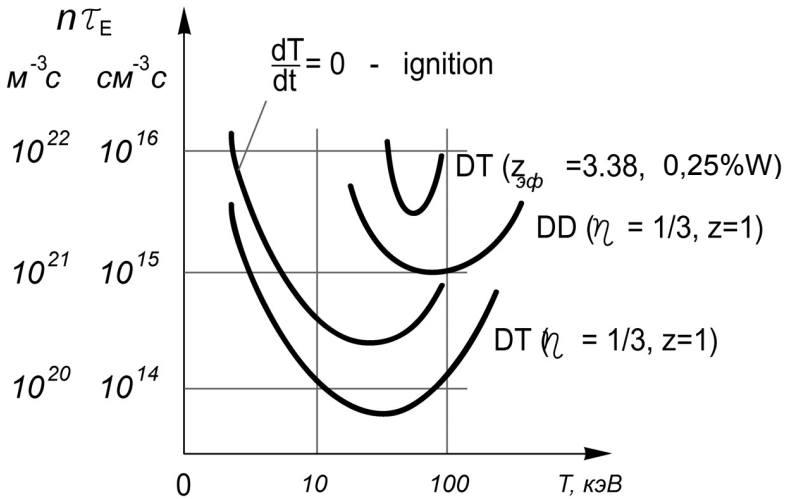


Рис.9.11. Зависимость произведения концентрации плазмы на время ее жизни от температуры для DT и DD реакций. Показана также зависимость (9.19) при попадании в плазму 0,25% примеси вольфрама. Соответствующая зажиганию (ignition) DT реакции кривая  $dT/dt = 0$  получена из (9.19) при  $Z_{\text{эфф}} = 1$

Область выше кривой для DT реакции при  $\eta_T \eta_I = 1.3, Z=1$  соответствует сформулированному выше условию принципиальной ее осуществимости (*breakeven*), которое по достижению температуры  $T=10$  кэВ выполняется при значении

$$n\tau_E \geq 10^{14} \text{cm}^{-3}\cdot\text{c} \quad \text{или} \quad n\tau_E \geq 10^{20} \text{M}^{-3}\cdot\text{c}. \quad (9.21)$$

Выражение (9.21) – это хорошо известное из популярной литературы численное выражение критерия Лоусона для осуществимости управляемого термоядерного синтеза. Часто вместо критерия Лоусона для оценки степени близости параметров плазмы в той или иной установке к заветному рубежу используют так называемое «тройное термоядерное произведение»  $n\tau_E T$ , которое при  $T \sim 10$  кэВ имеет плоский минимум при:

$$n\tau_E T \geq 3,5 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с} \cdot \text{кэВ}. \quad (9.22)$$

УТС на основе DD реакции, сечение которой значительно меньше, а максимум находится при большей температуре, чем у DT реакции, как следует из рис.9.11, возможен при  $n\tau_E > 10^{15} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$  и на порядок большей температуре ( $\sim 100 \text{ кэВ}$ ).

Кроме порога осуществимости УТС есть еще *порог зажигания* (*ignition*) термоядерной реакции в реакторе. Ему отвечает условие превышения мощности разогрева плазмы  $\alpha$ -частицами над потерями, что в уравнении (9.16) соответствует положительному значению  $dT/dt$ . Кривая  $dT/dt=0$  на рис.9.11 показывает, что для того, чтобы реактор заработал сам без дополнительного подогрева ( $P_{aux}=0$ ), необходимо еще на порядок поднять значение  $n\tau_E$ .

Однако ситуация радикально меняется, если вместо  $M=1,2$  в (9.19) подставить  $M=7$ . Значения необходимых для достижения критерия Лоусона параметров плазмы оказываются почти на порядок меньше и уже достигнуты на современных исследовательских установках.  $M=7$ , как уже указывалось, соответствует применению в blankets урана 238. Такой реактор называется *гибридным* (синтез+деление). Уран 238 сейчас не используется, в то время как запасы урана 235 сильно ограничены. Гибридный термоядерный реактор кроме производства энергии решил бы проблему топлива для традиционной ядерной энергетики, так как время наработки плутония в таком реакторе существенно меньше, чем в ядерных реакторах – *бридерах*.

Самая верхняя кривая на рис.9.11 указывает на крайне негативную роль в осуществимости УТС примесей в плазме. Даже четверть процента попавших в DT плазму примесей вольфрама, из которого сейчас настойчиво предлагают сделать все обращенные к плазме элементы реактора, делают задачу овладения управляемым термоядерным синтезом, куда более сложной, чем использование DD реакции с неисчерпаемыми источниками дейтерия (содержание изотопа D в имеющемся на Земле водороде составляет  $\sim 5 \cdot 10^{-5}$ ). Катастрофическое изменение зависимости  $n\tau_E(T)$  с ростом  $Z_{эф}$  связано с квадратичной зависимостью от  $Z$  радиационных потерь плазмы (см.(9.15) или рис.9.9). Поэтому проблема очистки плазмы от примесей является одной из важнейших в УТС с магнитным удержанием. Для этого еще в середине прошлого века был предложен *дивертор*.

Дивертор – это устройство, которое так изменяет магнитную конфигурацию в некой локальной зоне установки с магнитным

удержанием плазмы, что начинает уходить из области удержания в специальный приемник, унося с собой и попавшие в плазму примеси (рис.9.12). Если между катушками, создающими продольное магнитное поле, поместить дополнительную катушку с током противоположного направления, то в зазоре между катушками поле ослабится и его силовые линии выйдут наружу. При этом создается магнитная конфигурация с х-точкой (как при компенсации поля тока плазмы вертикальным полем управляющих катушек, показанном на рис.9.4). В диверторе плазма, попадая на специальные приемные пластины, нейтрализуется, а образовавшийся газ откачивают вакуумными насосами. В токамаке диверторная конфигурация создается дополнительными полоидальными катушками, расположенными внутри разрядной камеры (см. сечение реактора ИТЭР на рис.9.14).

Дивертор нужен не только для очистки плазмы от примесей для улучшения энергобаланса в реакторе, но без него, в принципе, трудно представить стационарный режим работы реактора из-за накопления гелиевой «золы». Действительно, из динамики изменения содержания топлива

$$\frac{dn_i}{dt} = -\frac{n_i^2}{2} < \sigma_{TD} v > - \frac{n_i}{\tau_i} (1 - R_i) + S_f \quad (9.23)$$

и образующейся в ходе реакции «золы»

$$\frac{dn_\alpha}{dt} = \frac{n_i^2}{4} < \sigma_{TD} v > - \frac{n_\alpha}{\tau_\alpha} (1 - R_\alpha), \quad (9.24)$$

где  $n_i$ ,  $n_\alpha$  – концентрации, а  $\tau_i$ ,  $\tau_\alpha$  – времена удержания,  $R_i, R_\alpha$  – коэффициенты возврата соответственно ионов изотопов водорода и гелия, а  $S_f$  – скорость подпитки топливом, можно найти скорость накопления «золы» в реакторе. Для этого надо учесть квазинейтральность плазмы

$$n_i + 2n_\alpha = n_e \quad (9.25)$$

и постоянство ее давления в ходе реакции

$$(n_i + n_e + n_\alpha)kT = 2n_0kT, \quad (9.26)$$

где  $n_0$  – концентрация топлива в самом начале реакции.

Решая уравнение (9.24) ( $< \sigma_{DT} v > \equiv f_{DT}$ ) в пренебрежении удалением гелия ( $R_\alpha=1$ ) с учетом (9.25) и (9.26), получаем скорость изменения относительной концентрации гелия в плазме:



$$\frac{n_{\alpha}}{n_0}(t) = \frac{(n_0/4)f_{DT}t}{1 + (n_0/4)f_{DT}t}. \quad (9.27)$$

Так как мощность реактора пропорциональна квадрату плотности  $P_{яд} \propto n_i^2$ , то, подставляя  $n_i/n_0 = 1 - (3/2)[n_{\alpha}/n_0]$ , из (9.27) находим время, за которое мощность реактора уменьшится от  $P_{яд}(0)$  до  $P_{яд}(t)$ :

$$t = \frac{8}{3n_0 f_{DT}} \left[ \sqrt{\frac{P_{яд}(0)}{P_{яд}(t)}} - 1 \right].$$

Откуда для значения  $f_{DT} \approx 10^{-22} \text{ м}^{-3} \text{ с}$  при  $T=10 \text{ кэВ}$  и типичной для реактора-токамака концентрации  $n=10^{20} \text{ м}^{-3}$  получаем, что мощность реактора, у которого не удаляется «зола», уменьшится вдвое за 100 с.

Дивертор служит не только для удаления «золы» и примесей, но и для съема уносимого плазмой тепла. Крайняя, проходящая через  $x$ -точку замкнутая поверхность – *сепаратриса*, отделяет центральную область удерживаемой плазмы от удаляемого так называемого скрэп-слоя (*scrape-off-layer* или SOL) периферийной плазмы (см. рис.9.12). В этом слое продиффундировавшая через сепаратрису плазма движется с ионно-звуковой скоростью вдоль магнитных силовых линий, огибая по винтовой траектории основную плазму, и заканчивает свой путь на приемных пластинах дивертора. Атомы примесей, вылетающие со стенок под действием корпускулярного (и электромагнитного) излучения плазмы, ионизируются электронами в этом слое и, превратившись в ионы, вместе с плазмой также уносятся в дивертор. Плотность мощности в этом потоке плазмы может быть очень большой (до нескольких десятком МВт/м<sup>2</sup>). Ни один известный материал таких тепловых нагрузок не выдерживает, поэтому приемные пластины дивертора располагают под скользящим углом к направлению суммарного магнитного поля для увеличения площади контакта. Исследуется и другой прием снижения удельных тепловых нагрузок.

В область дивертора напускается газ, атомы которого, возбуждаясь в потоке плазмы, переизлучают приносимую ей мощность на значительно большую площадь обращенных к плазме элементов дивертора (*газовый дивертор*).

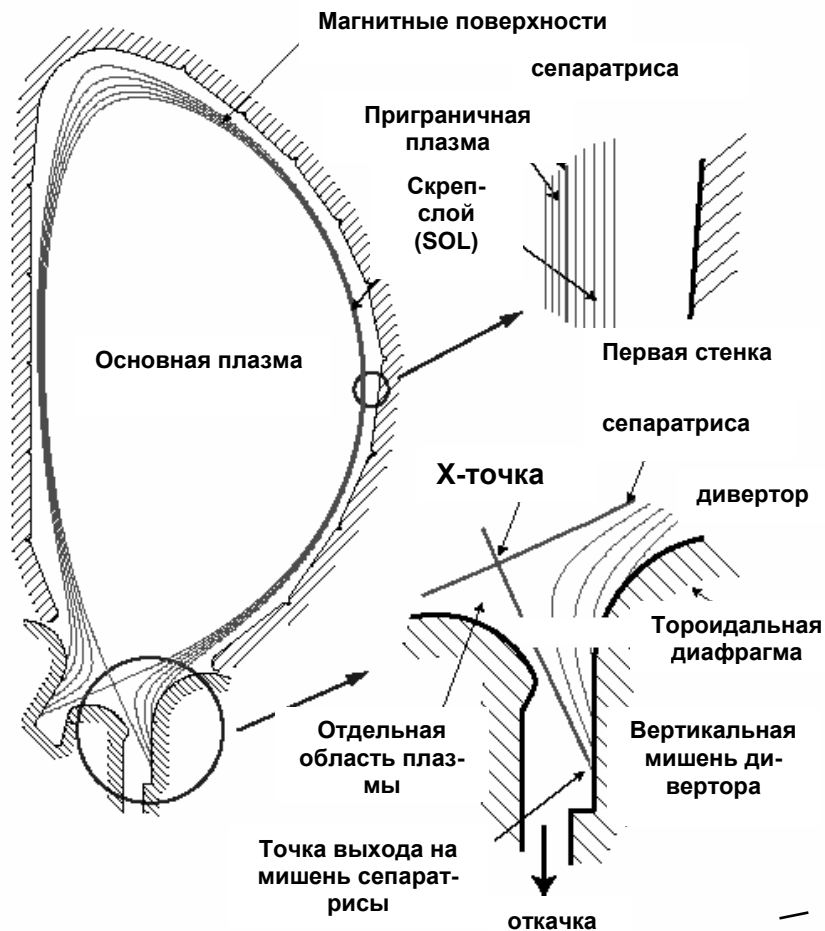


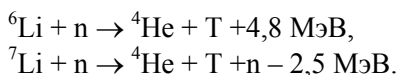
Рис.9.12. Конфигурация скреп-слоя в токамаке с дивертором

В первых токамаках вместо дивертора использовались ограничивающие плазму диафрагмы или *лимитеры*. Выполненные из термостойких материалов (сначала вольфрам и молибден, а в дальнейшем исключительно графит и графитовые композиты) лимитеры предохраняют первую стенку от попадания мощных потоков плазмы при срывах разряда или при диссипации плазмы после его окончания. В современных токамаках лимитеры также использу-

ются. Бывают так называемые откачные лимитеры и стартлимитеры.

Кроме потоков заряженных частиц и электромагнитного излучения (и нейтронов в реакторе) внутренние стенки камеры бомбардируются *нейтралами перезарядки*, которые образуются за счет фоторекомбинации ионов с электронами и перезарядки на выживших в горячей плазме нейтральных атомах. Атомные частицы в отличие от электронов и квантов электромагнитного излучения могут приводить к заметному *физическому распылению* материалов. Зависимость коэффициента распыления от энергии имеет пороговый характер (ниже которого передаваемая при соударении энергия меньше энергии, необходимой для выбивания атома из решетки), поэтому, если сделать энергию падающих ионов меньше этого порога, то время жизни таких материалов существенно возрастает. Так как водород образует химические соединения с некоторыми элементами, то при их использовании имеет место *химическое распыление*, которое зависит не от энергии частиц, а от температуры поверхности материала. Поэтому использование очень удобного материала – графита (который при высокой температуре не плавится, а сублимирует) приводит к очень неприятному побочному эффекту, а именно – попавшие в плазму атомы углерода, осаждаясь на стенках (и в щелях), связывают значительное количество водорода. Для ДТ реактора это крайне нежелательно, так как захватываемый стенками тритий создает дополнительные проблемы в обеспечении безопасности (тритий бета-активен с периодом полураспада 12,3 года) и в наработке трития для реакции синтеза. Расчеты специалистов показали, что количество «омертвленного» в ИТЭРе трития не должно превышать ~350 г.

Здесь надо пояснить, что как короткоживущего изотопа трития в природе очень мало, и в схемах термоядерных ДТ реакторов предусмотрена его наработка в бланкете за счет взаимодействия термоядерных нейтронов с литием:



Используя в бланкете такие элементы, как Be, Pb, Vi, за счет реакции размножения нейтронов (n,2n), сечение которой для нейтронов с энергией 14 МэВ достаточно велико ( $\sim 2 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-2}$ ), можно осуществ-

вить расширенное воспроизводство трития, когда на каждый «сгоревший» в реакции синтеза атом трития в blankets будет нарабатываться 1,1-1,2 атома трития. Следует заметить, что содержание лития в морской воде  $\sim 1,5 \cdot 10^{-7}$ , поэтому его запасы можно считать безграничными.

*Подпитка топливом* необходима для поддержания концентрации топлива в реакторе на постоянном уровне. Обратимся к (9.21). Общую необходимую скорость подпитки  $Q_f$  для стационарных условий получим, умножив (9.21) на объем реактора:

$$Q_f = S_f V = \left[ \frac{n_i^2}{2} \langle \sigma_{TD} v \rangle + \frac{n_i}{\tau_i} (1 - R_i) \right] V. \quad (9.28)$$

Легко подсчитать, что для реактора масштаба ИТЭР ( $n \sim 10^{20} \text{ м}^{-3}$ ,  $V \sim 500 \text{ м}^3$ ) при температуре 10 кэВ, что соответствует скорости реакции  $\langle \sigma_{TD} v \rangle \equiv f_{DT} = 10^{-22} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$ , без дивертора и откачки ( $R_i = 1$ ), необходима скорость подпитки  $Q_f \sim 2,5 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$ . Для одного импульса длительностью 400 с реактора ИТЭР это соответствует 100 г трития. Время удержания частиц, как правило, на порядок превышает время удержания энергии  $\tau_c \equiv \tau_i \sim 10 \tau_E$ . При времени удержания энергии  $\tau_E \sim 1 \text{ с}$ , что необходимо для выполнения критерия Лоусона в плазме с концентрацией  $10^{20} \text{ м}^{-3}$ , получаем для приведенного выше примера связь между необходимой скоростью подпитки топливом извне и глобальным коэффициентом рециркуляции (*рециклинга*) топлива  $R_f$  в реакторе  $Q_f \approx 2,5 \cdot 10^{19} [1 + 20(1 - R_f)] \text{ с}^{-1}$ . Если  $R_f = 0$ , то скорость подпитки надо увеличить в 20 раз.

Подпитку извне можно осуществлять, напуская дополнительно рабочий газ в камеру, однако холодный газ быстро ионизируется на периферии, в то время как выгорание происходит в центральных областях установки.

Подпитка осуществляется автоматически при инъекции быстрых нейтральных атомов для нагрева плазмы. Её скорость определяется эквивалентным инжектируемым током  $Q_f (\text{с}^{-1}) = 6,25 \cdot 10^{18} \cdot I_{инж} [\text{экв.А}]$ . Однако при инъекции быстрых нейтральных атомов мы получаем связь между уровнем вкладываемой мощности и скоростью подпитки, что затрудняет их независимое регулирование.

Этих недостатков лишена так называемая *пеллет-инжекция*, при которой в плазму выстреливают таблетки замороженного топ-

лива с такой скоростью, чтобы содержащиеся в них атомы долетели до центральных областей плазмы. Расчеты и эксперименты с пеллет-инжекцией на действующих установках показывают, что для установок с термоядерной плазмой нужно инжектировать пеллеты массой 10-20 г и скоростью 2-3 км/с. Такую, значительно большую, чем у настоящих пушек, скорость пеллет получают с помощью центрифуг или легкогазовых пушек, в которых ускоряющим поршнем служит импульс давления легкого газа (гелия). Причем для квазистационарной работы установки надо обеспечить «пулеметный» режим пеллет-инжекции.

Подпитка топливом может происходить и без всякой внешней инжекции, если во время разряда в плазму начинает поступать водород, ранее захваченный стенками установки. При этом коэффициент рециклинга, определяемый как отношение суммы потоков частиц, попадающих из стенки в плазму, к суммарному потоку падающих на стенку ионов  $\Gamma_i$  и нейтральных атомов водорода  $\Gamma_a$

$$R_V = \frac{\Gamma_R + \Gamma_D + \Gamma_S + \Gamma_G}{\Gamma_i + \Gamma_a}$$

может быть и больше единицы. В этой формуле  $\Gamma_R$  – поток отраженных (и соответственно, сохранивших часть своей первоначальной энергии) частиц,  $\Gamma_D$  – поток частиц, десорбированных со стенок падающими из плазмы частицами или электромагнитным излучением,  $\Gamma_S$  – поток газа, попадающего в плазму при распылении материала стенки частицами плазмы,  $\Gamma_G$  – поток тепловой десорбции, связанный с диффузией к поверхности и выходом из материала ранее внедренных или содержащихся в исходном материале атомов газа. При этом атом водорода может неоднократно циркулировать между плазмой и стенкой. Атом водорода может быть «возвращен» из плазмы в стенку за счет следующих процессов. Во-первых, это диссоциация десорбированной с поверхности молекулы водорода в периферийной плазме. При этом в результате диссоциации образуются фран-кондоновские атомы с энергией 2-4эВ, один из которых летит в плазму, а другой возвращается на стенку. Во-вторых, это перезарядка покинувшего стенку нейтрального атома на ионах плазмы, и, наконец, атом или молекула может испытать ионизацию и с потоком плазмы возвратиться на лимитер или приемную пластину дивертора.

Если атомы стенки вступают в химическое взаимодействие с водородом, например, в случае стенки или лимитера из графита, то одновременно с переносом водорода в многократных процессах образования углеводородов на стенки и последующей диссоциации и ионизации в плазме, происходит и перенос углерода. Поэтому элементы разрядных камер установок, изготовленных из других материалов, в местах, где осаждение преобладает над распылением, оказываются покрытыми углеводородными пленками.

Для предотвращения нежелательной подпитки плазмы ранее захваченными газами разрядные камеры токамаков тренируют в тлеющих или других разрядах в инертных газах. Попадающие на стенку, ускоренные пристеночным падением потенциала  $\sim(3-5)kT_e$  (см. §51) ионы инертных газов (He, Ne, Ar) десорбируют водород и другие примеси, предотвращая их попадание в плазму во время основного разряда.

*Кондиционирование* поверхности разрядных камер токамаков путем осаждения в газовом разряде легких элементов, таких как бор (боронизация), кремний (силиконизация), производят не только для поглощения активных примесей (в основном кислорода), но, главным образом, для понижения среднего заряда плазмы. Эффективный заряд плазмы снижается из-за того, что в нее попадают элементы с существенно меньшим атомным номером, чем элементы непокрытой поверхности камеры (например, камеры из нержавеющей стали). Такая процедура сильно (примерно как  $Z^2$ ) снижает радиационные потери плазмы (см. (9.14) и рис.9.10) и приводит к заметному улучшению ее параметров – увеличивается время удержания и повышается температура плазмы. Так, распыление в токамаке TFTR литиевых пеллет ( $Z=3$ ) позволило получить рекордные значения температуры (около 40 кэВ) и тройного термоядерного произведения.

6. Следует упомянуть еще об одном обнаруженном в токамаках явлении, которое неожиданно привело к удвоению тройного термоядерного произведения (9.22) В экспериментах с дополнительным нагревом, как правило, за повышение температуры плазмы приходилось расплачиваться уменьшением энергетического времени удержания. Однако, когда у токамаков появился дивертор, то оказалось, что в процессе нагрева плазмы время удержания внезапно скачком возрастает в два раза. Такой *режим улучшенного удержания* назвали *H-модой* (high confinement) в отличие от *L-*

моды (low confinement), которая была характерна для токамаков с лимитером. В этом режиме профиль плотности скачком перестраивается с образованием значительно большего градиента давления на периферии плазмы, в то время как на меньших радиусах градиент плотности уплощается, приводя к возникновению *транспортного барьера* (рис.9.13).

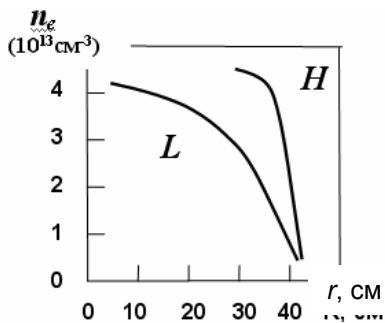


Рис.9. 13. Радиальный профиль плотности в токамаке при L и H режимах

всплывающей из основной плазмы магнитной силовой трубки, выделяется столько энергии, что, например, возможно локальное оплавление Ве тайлов.

## § 59. Реактор ИТЭР

Проектирование термоядерных реакторов началось в семидесятых годах прошлого века, когда на установках были получены данные, позволяющие в какой-то мере экстраполировать их на промышленные электростанции, но, главным образом из-за того, чтобы точнее обозначить те проблемы, которые предстоит решить при создании термоядерной энергетики. В СССР, США, Европе и Японии было предложено несколько проектов, но эффективность работы резко возросла, когда было начато международное сотрудничество в этом деле. Первый детальный международный проект ИНТОР разрабатывался объединенными усилиями команд из тех же стран до середины восьмидесятых. В 1985 году во время визита М.С. Горбачева во Францию наша страна предложила начать меж-

Параметры скрэп-слоя в H-моду меняются, температура повышается, а поток приносимой плазмой на стенки мощности становится резко неравномерным во времени с периодическими большими выбросами энергии в локализованных на периферии неустойчивостях – ELM-ax (edge localized mode). При этом за короткое время масштаба 1 мс в ограниченной зоне, которая соответствует винтовой конфигурации

дународное сотрудничество не только в проектировании, но и строительстве первого международного термоядерного экспериментального реактора ИТЭР.

ИТЭР является реактором-токамаком, рассчитанным на работу с длительным импульсом тока плазмы, с вытянутым по вертикали сечением плазмы и однонулевым дивертором (рис.9.14). В номинальном индуктивном режиме работы достигается мощность DT-реакции 500 МВт при длительности импульса горения реакции 400 с. При этом в плазму вводится до 100 МВт мощности дополнительного нагрева (ввод через патрубки в камеру пучков быстрых атомов, ВЧ- и СВЧ- мощности).

Катушки тороидального магнитного поля, центральный соленоид индуктора, внешние по отношению к катушкам тороидального магнитного поля катушки полоидального поля – сверхпроводящие. Использование сверхпроводника позволяет резко снизить необходимую для работы установки мощность. В качестве сверхпроводника полоидальных катушек предусмотрено применение NbTi (который использовался на первом в мире сверхпроводящем токамаке – отечественном Т-7). Для тороидального соленоида будет использован более дорогой Nb<sub>3</sub>Sn, который сохраняет сверхпроводимость при существенно больших магнитных полях. Тороидальный соленоид из этого сверхпроводника был впервые реализован на токамаке Т-15 в Курчатовском институте. Необходимость охлаждения сверхпроводников жидким гелием при температуре 4 К и обеспечения его термоизоляции предопределила конструкцию Т-15 в виде «вакуумного дома». То есть все элементы электромагнитной системы и разрядная камера помещены в один общий откачиваемый до низкого давления криостат. Именно такая же конструкция использована и в ИТЭР. Криостат представляет собой ребристый цилиндр с плоскими краями диаметром 28 м и высотой 24 м.

Обмотки тороидальных катушек заключены в прочные корпуса и формируют замкнутую силовую структуру, которая выдерживает огромные силовые нагрузки при создании поля и при быстрых изменениях поля тока (при этом в проводящих конструкциях электромагнитной системы возникают «гало» токи, взаимодействие которых с магнитными полями создает силы Ампера (9.7)). На этой механической структуре закреплены полоидальные катушки.

Вакуумная камера представляет собой двухстеночную конструкцию из 9 секторов с D-образным поперечным сечением и также



крепится к силовой структуре. Внутри вакуумной камеры расположены модули бланкета (429 шт.), обращенная к плазме поверхность которых покрыта Ве, а также 54 заменяемые диверторные каскеты из сплава меди, покрытые вольфрамом. В области максимальной плотности приносимого SOL теплового потока помещены мишени из углеродного (СС) композита. В отличие от металлов при высоких температурах графит не плавится, а возгоняется, поэтому его применение должно повысить время жизни диверторных модулей до очередной замены. Внутрикамерные элементы воспринимают поток тепла и частиц из плазмы и выполняют функцию нейтронной защиты вакуумной камеры и расположенных за ней сверхпроводящих катушек магнитной системы.

Бланкет выполняет три основные функции:

1. отвод энергии нейтронов и потоков тепла, приносимого в основном излучением плазмы;
2. обеспечение защиты вакуумной камеры и сверхпроводящих катушек от потока нейтронов, приводящих к накоплению в материалах радиационных дефектов и, как следствие, снижению их прочностных характеристик;
3. обеспечение пассивной стабилизации плазмы (см.(9.1)).

В настоящее время в проекте рассматривается только “защитный бланкет”. Однако проект допускает в дальнейшем замену на третийвоспроизводящие модули.

Для отвода тепла, выделяемого во внутрикамерных компонентах и в вакуумной камере, служит система водяного охлаждения, состоящая из отдельных петель. Она спроектирована таким образом, чтобы исключить попадание в окружающую среду трития и активированных продуктов коррозии.

Система подачи топлива имеет подсистемы инъекции DT-газовой смеси и таблеток (пеллетов) изотопов водорода. В начальной фазе плазменного разряда газообразное топливо низкой концентрации подаётся в вакуумный объём с помощью системы инъекции. Плазма круглого сечения (с радиусом  $\sim 1$  м) инициируется в районе внешнего лимитера на электронно-циклотронном резонансе и затем по мере повышения тока принимает вытянутое сечение с  $x$ -точкой, необходимой для диверторной конфигурации. Как

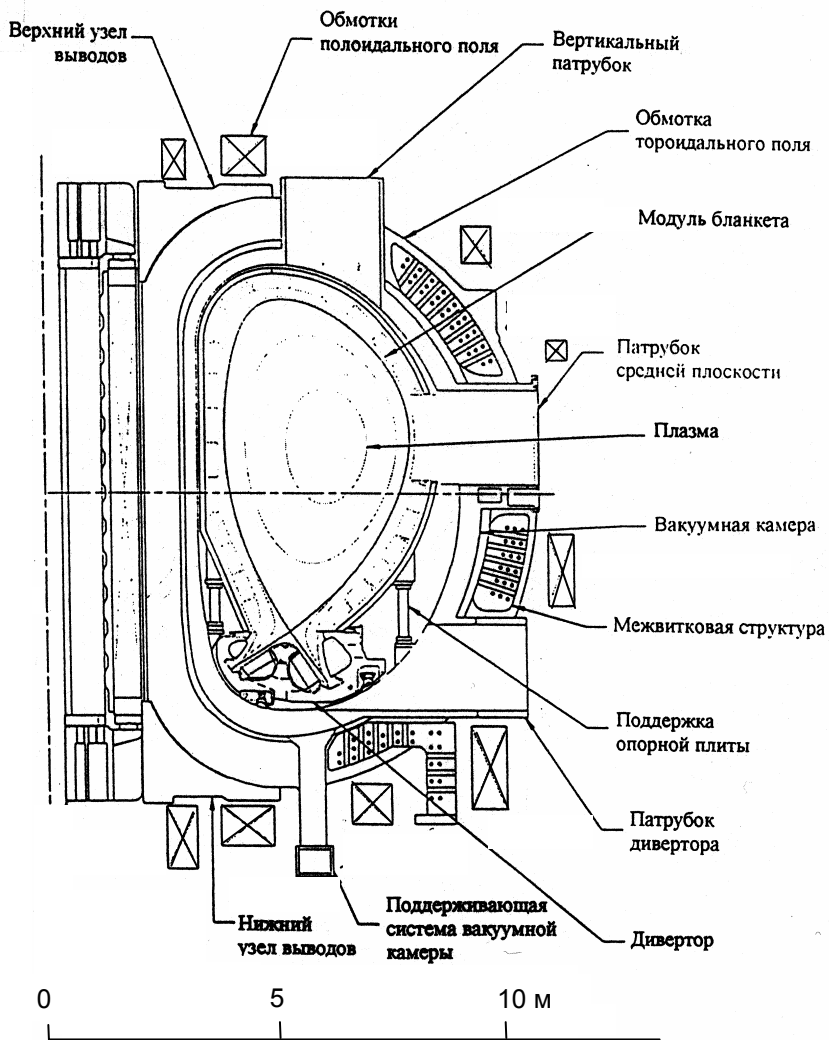


Рис. 9. 14. Поперечное сечение реактора ИТЭР

только достигается плато тока плазмы (15 МА для нормального режима работы), плотность плазмы увеличивается с помощью инъекции газа, крупинок топлива или их комбинации одновременно с дополнительным нагревом и приблизительно через 100 с возникают условия для начала реакции синтеза с термоядерным выходом около 500 МВт.

Предусмотрена система автоматического управления токами в катушках полоидальной магнитной системы, вакуумной откачкой, подачей топлива и необходимых для гашения реакции примесей ( $N_2$ , Ar), а также системами дополнительного нагрева по сигналам с датчиков диагностических систем.

В ИТЭР важнейшей задачей диагностики является надежное измерение параметров, определяющих безопасную работу установки. Вторым приоритетом является измерение параметров, позволяющих оптимизировать режим работы, и приближение к достижению программных целей. Третий приоритет – исследование новых явлений в плазме. Система диагностики включает 45 различных методик, значительная часть которых описана в [Стрелков]

Что касается безопасности, то проект сориентирован, главным образом, на удержании радионуклидов, причём остальные функции безопасности рассматриваются с точки зрения работоспособности барьеров удержания. Число «линий защиты» и требования к ним зависят от накопленной радиоактивности при допустимом уровне риска.

Для удержания трития (и активированной пыли, образующейся в камере при взаимодействии плазмы с окружающими элементами) предусмотрены последовательные барьеры. Они включают вакуумную камеру, криостат и системы очистки воздуха, обеспечивающие его детритизацию и фильтрацию внутри здания. Радиоактивные выбросы и сбросы как при нормальной эксплуатации, так и аварийные фильтруются и очищаются от трития до такой степени, чтобы их поступление в окружающую среду было настолько мало, насколько это достижимо при разумных затратах, чтобы обеспечить безопасную работу персонала и безопасность населения вне зоны реактора.

## Основные параметры ИТЭР

Мощность, МВт	500 (700)
Отношение термоядерной мощности к мощности дополнительного нагрева, Q	$\geq 10$
Средняя нейтронная нагрузка на стенку, МВт/м <sup>2</sup>	0.57 (0.8)
Время горения плазмы в индуктивном режиме, с (с периодом 1800 с)	$\geq 400$
Большой радиус плазмы, м	6.2
Малый радиус плазмы, м	2.0
Ток плазмы, МА	15 (17)
Индукция тороидального магнитного поля на оси плазмы, Тл	5.3
Объём плазмы, м <sup>3</sup>	837
Площадь поверхности плазмы, м <sup>2</sup>	678
Мощность дополнительного нагрева, МВт	73
Средняя электронная плотность, $10^{19}$ м <sup>-3</sup>	10 -14
Средняя температура ионов, кэВ	8.1
Средняя температура электронов, кэВ	8.9

Приведенные параметры «отражают тщательный баланс физических требований по удержанию, управлению и устойчивости плазмы и инженерных ограничений (таких как тепловые нагрузки и электромагнитные характеристики, доступ к внутренним элементам и т.п.) для гарантирования безопасной и надежной работы при разумной стоимости» [Голубчиков].

На рис.9.16, 9.17 показан внешний вид и конструкция реактора и его расположение в здании (на  $\frac{3}{4}$  под землей) вместе с биологической защитой.

Таким образом, совместная работа в течение девяти лет над техническим проектом ИТЭР в комбинации с продолжающимся общим прогрессом в термоядерных физических исследованиях привела страны, участвующие в проекте, да и всё мировое термоядерное сообщество к рубежу, когда они оказались технически готовы поставить вопрос о сооружении первого в мире исследовательского термоядерного реактора с чертами, присущими энергетическим установкам. Критерием выбора параметров ИТЭР стало

обеспечение гарантированного зажигания и стабильного поддержания реакции при минимальной стоимости его сооружения.

В 2002 году разными странами (Канадой, Японией, Испанией, Францией) были предложены площадки для строительства ИТЭР. После трудных переговоров, когда США, Япония и присоединившаяся позже к проекту Южная Корея непременно хотели построить реактор в Японии, а Европа, Россия и Китай, который тоже присоединился к международной команде, настаивали на его сооружении в Европе, в 2006 году было принято окончательное решение о строительстве ИТЭР в Кадараше во Франции. График работ по ИТЭР предусматривает, что реактор будет построен к 2016 году, затем начнется фаза физического пуска и экспериментов с водородной плазмой, полномасштабные эксперименты с дейтериево-тритиевым топливом должны начаться в 2020 году. Расчетный срок службы реактора 30 лет. За это время будет спроектирован и построен демонстрационный термоядерный реактор ДЕМО, который должен продемонстрировать возможность реализации и надежной эксплуатации всех термоядерных технологий. Начало коммерческого использования термоядерной энергии в промышленных термоядерных электростанциях ПТЭ планируется к середине века.

Недавно к проекту ИТЭР присоединилась и Индия, поэтому можно уверенно говорить, что большая часть Человечества связывает будущее своей энергетики с управляемым термоядерным синтезом, а его реализация будет происходить в реакторе, созданном на базе изобретенной в России плазменной установки токамак.

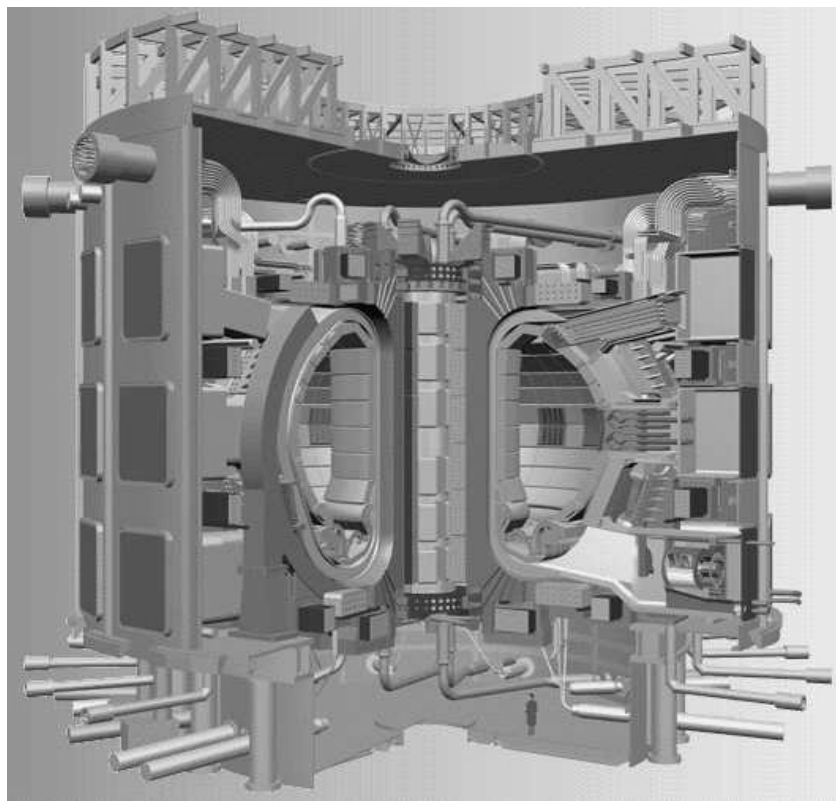


Рис.9.15. Конструкция международного термоядерного реактора-токамака ИТЭР

## Список использованной и рекомендуемой литературы

1. Романовский М.К. Элементарные процессы и взаимодействие частиц в плазме. – М.: МИФИ, 1984.
2. Zhdanov S.K., Kurnaev V.A., Pisarev A.A. Lectures on Plasma Physics. М.: МЕРPhI, 1998.
3. Александров А.Ф., Рухадзе А.А. Лекции по электродинамике плазмоподобных сред. М.: Изд. МГУ, 1999.
4. Фортон В.Е., Якубов И.Т. Неидеальная плазма. М.: Энергоатомиздат, 1994.
5. Физическая энциклопедия \под ред. Прохорова А.М. \, т.2. М.: Советская энциклопедия, 1990.
6. Физические величины. Справочник под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.
7. Смирнов Б.А. Физика слабоионизованной плазмы. М.: Наука, 1978. С.132, задача 2.23.
8. Алексеев Б.В., Котельников В.А. Зондовый метод диагностики плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1988.
9. Франц-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. - М.: Атомиздат, 1964.
10. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. - М.: Физматгиз, 1961.
11. Трубников Б.А. Теория плазмы. - М.: Энергоатомиздат, 1996.
12. Лукьянов С.Ю., Ковальский Н.Г. Горячая плазма и управляемый ядерный синтез. М.: МИФИ, 1997.
13. Брагинский С.И. Вопросы теории плазмы. - М.: Атомиздат, 1963. Т.1, С.208-209.
14. Галеев А.А., Сагдеев Р.З. Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1973.
15. Тамм Е.И. Основы теории электричества. М.: Гостехиздат, 1946, с.432.
16. Леонтович М.А., Осовец С.М. // Атомная энергия, 1956, №3.
17. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976.
18. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978.
19. Иванов А.А. Физика сильнонеравновесной плазмы. М.: Атомиздат, 1977. С.11-23.

20. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика (Серия: «Теоретическая физика», том X). М.: Наука, 1979.
21. Кингсеп А.С. Введение в нелинейную физику плазмы. М.: Изд. МФТИ, 1996.
22. Кадомцев Б.Б. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.:Изд.АН СССР, 1958.
23. Шафранов В.Д. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд.АН СССР, 1958, т.2.
24. Райзер Ю.П. Основы современной физики газоразрядных процессов, Москва, Наука, 1980.
25. Димитров С.К., Фетисов И.К., Лабораторный практикум по физике газоразрядной плазмы и пучков заряженных частиц, МИФИ, 1989.
26. Арцимович Л.А., Лукьянов С.Ю. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М. 1972.
27. Глазер В. Основы электронной оптики. М. 1957. С.64.
28. Кельман В.М. Явор С.Я., Электронная оптика. М. 1959. С.125.
29. Капцов Н.А. Электроника. М. 1956. С.138.
30. Грановский В.Л. Электрический ток в газах, Москва, 1971.
31. Добрецов Л.Н., Гамаюнова М.В. Эмиссионная электроника. М. 1966.
32. Протасов Ю.С., Чувашев С.Н. Физическая электроника газоразрядных устройств. М. 1992. С.352.
33. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1992.
34. Лодзинский Э.Д., Фирсов О.Б. Теория искры. М.: Атомиздат, 1975.
35. Русанов Д., Фридман А.А. Физика химически активной плазмы. М.: 1984.
36. Энциклопедия низкотемпературной плазмы под ред. В.Е.Фортова. Вводные тома I-IV, М.: Наука, 2000.
37. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М. ФИЗМАТЛИТ. 2006. С.576.
38. Лебедев Ю.А. Введение в зондовую диагностику плазмы пониженного давления, М.: МИФИ. 2003. С.56. (Серия «Учебная книга по диагностике плазмы»).
39. Стрелков В.С. Физические основы методов диагностики плазмы в токамаке. М.: МИФИ. 2004. С. 88. (Серия «Учебная книга по диагностике плазмы»)



40. Курнаев В.А. Взаимодействие плазмы с поверхностью М.: МИФИ. 2003. С.112.
41. Черковец В.Е., Казаков С.А., Наумов В.Г. Лазерная техника для физических исследований и практических применений, М.МИФИ. 2006.С.56. (Серия «Учебная книга по диагностике плазмы»).
42. Глухих В.А., Беляков В.А., Минеев А.Б. Физико-технические основы управляемого термоядерного синтеза. Учебное пособие С.-Пб.: Изд-во Политехн.ун-та.2006. С. 348.
43. Ядерный синтез с инерционным удержанием. Современное состояние и перспективы для энергетики. /Под ред. Б.Ю.Шаркова. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005. С. 254.
44. Голубчиков Л.Г. ИТЭР. Решающий шаг./ Под ред. В.А. Курнаева. М.: МИФИ. 2004. С. 148.
45. Hippler R., Pfau S., Schmidt M., Schoenbach K.H. (Eds) Low temperature plasma physics (Fundament aspects and applications) WILEY-VCH, 2001. 523 p.
46. Stangeby P.C. The boundary of magnetic fusion devices. IoP Publishing Ltd 2000. 717p.
47. Konuma M. Plasma techniques for film deposition. Alpha Science International Ltd. Germany. 2005. 337p.
48. Энциклопедия низкотемпературной плазмы под ред. В.Е.Фортова, Вводный том III, М.: «Наука», 2000.
49. Ананьин О.Б. и др., Лазерная плазма. Физика и применение. М.: МИФИ, 2003.С.400.
50. Ферцигер Дж., Капер Г., Математическая теория процессов переноса в плазме.М.: Мир.1976
51. Брагинский С.И. Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат. 1963. Т.1. С.183-272
52. Митчнер М.,Кругер Ч. Частично ионизованные газы.М.:Мир.1976
53. Жданов В.М. Явления переноса в многокомпонентной плазме. М.: Энергоиздат.1982. С.187.

Наиболее употребляемые формулы и соотношения

Скорость электрона	$v_e[\text{см/с}] = \sqrt{\frac{2W_e}{m_e}} = 5.93 \cdot 10^7 \sqrt{W_e[\text{эВ}]}$
Скорость иона	$v_i[\text{см/с}] = \sqrt{\frac{2W_i}{m_i}} = 1.39 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{W_i[\text{эВ}]}{m_i[\text{а.е.м.}]}}$
Радиус Дебая	$r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}};$ $r_D[\text{см}] \approx 7 \sqrt{\frac{T[\text{К}]}{n[\text{см}^{-3}]}} \approx 500 \sqrt{\frac{T[\text{эВ}]}{n[\text{см}^{-3}]}}$
Ленгмюровская (плазменная) частота	$\omega_p \left[ \frac{1}{\text{с}} \right] = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}} = 5.6 \cdot 10^4 \sqrt{n[\text{см}^{-3}]}$
Параметр неидеальности плазмы	$\gamma = \frac{e^2 n^{1/3}}{T}$
Число Дебая	$N_d = 5.6 \cdot 10^3 \frac{T^{3/2}[\text{К}]}{n^{1/2}[\text{см}]} $
Формула Саха-Ленгмюра	$\frac{n_i n_e}{n_a} \cong \frac{g_e g_i}{g_a} 3 \cdot 10^{21} T^{3/2}[\text{эВ}] e^{-\frac{I}{T}}$
Коэффициент диффузии	$D \approx \frac{3\sqrt{3} T^{5/2}}{4\pi e^4 \Lambda n \sqrt{m}}$
Подвижность $b$	$\vec{u} = b \vec{F}$
Соотношение Эйнштейна	$b = \frac{D}{T}$
Коэффициент амбиполярной диффузии	$D_a \approx D_i \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right)$
Проводимость полностью ионизованной плазмы	$\hat{\sigma} = (e^2 n / m_e) \tau_{ei}, \quad \hat{\sigma} = \frac{0,67 e^2 T^{3/2}}{m_e \Lambda},$

	$\hat{\rho}[Ом \cdot м] \equiv \sigma^{-1} \approx 2,4 \cdot 10^{-9} Z_{эфф} \Lambda T_e^{-3/2} [кэВ]$
Рассеяние в кулоновском поле	$ctg\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\rho}{\rho_{\perp}}$
Кулоновский логарифм	$\Lambda = \ln \frac{r_D}{\rho_{\perp}}$
Прицельный параметр	$\rho_{\perp} = (Z_1 Z_2 e^2) / (\mu v^2)$ $\mu$ - приведенная масса частиц
Сечение кулоновского рассеяния	$\sigma = 4\pi b_{\perp}^2 \Lambda$
Длина и время электрон-ионных столкновений	$\lambda_{e,i} [см] = 4.5 \cdot 10^5 \frac{T_e^2 [К]}{n [см^{-3}] L_c} \approx 3 \cdot 10^4 \frac{T_e^2 [К]}{n [см^{-3}]}$ ; $\tau_{e,i} [с] = 0.67 \frac{T_e^{3/2} [К]}{n [см^{-3}] L_c} \approx 4.5 \cdot 10^{-2} \frac{T_e^{3/2} [К]}{n [см^{-3}]}$ ;
Скорость звука в плазме	$c_s = \sqrt{\frac{Z T_e}{M_i}}$
Циклотронная частота электрона	$\omega_{le} [с^{-1}] = \frac{eH}{m_e c} = 1.76 \cdot 10^7 \cdot H [Э]$
Ларморовский радиус электрона	$r_{le} [см] = \frac{v_{\perp}}{\omega_e} = 3.37 \frac{\sqrt{W_e^{\perp} [эВ]}}{H [Э]}$
Циклотронная частота иона	$\omega_{li} [с^{-1}] = \frac{eH}{m_i c} = 9649 \cdot H [Э] / m_i [a.e.m.]$
Ларморовский радиус иона	$r_{li} [см] = \frac{v_{\perp}}{\omega_i} = 144 \frac{\sqrt{W_i^{\perp} [эВ] m_i [a.e.m.]}}{H [Э]}$
Скорость дрейфа в замагниченной плазме	$\vec{v}_{op} = \frac{c [\vec{F} \vec{H}]}{eH^2}$ ; $v_{op} (см/с) = 10^8 \frac{E [В/см]}{H [Э]}$ $\vec{v}_{sp} [см/с] = \frac{2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 [\vec{H} \nabla H]}{2\omega_s H^2} = 10^8 \frac{2W_{\parallel} [эВ] + W_{\perp} [эВ]}{H [Э] R_{sp} [см]} \vec{b}$
Поперечный адиабатический инвариант	$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2H}$

Пробочное отношение	$R_{np} = H_m / H_0$ для тора $R_{np} = H_{max}/H_{min} \approx (R+a)/(R-a)$
Поле тока	$\oint H_l[\mathcal{E}] dl [см] = 0, 4\pi I [A]$
Коэффициент классической диффузии поперек поля	$D_{\perp} = \frac{\rho_L^2}{\tau_{ei}} = \frac{T_e + T_i}{T_e} \frac{D}{1 + (\omega_{pe} \tau_{ei})^2}$
Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле	$\frac{F[\kappa\Gamma]}{l[см]} \approx 10^{-7} I[A] H[\mathcal{E}]$
МГД уравнение	$\rho_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = -\nabla P + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}]$
Магнитное давление	$p_m = \frac{B^2}{8\pi}$
Глубина скин-слоя	$\delta(см) = 0,3 \sqrt{\frac{\hat{\rho} T_{1/2}(мс)}{\hat{\rho}_{Cu20^{\circ}C}}}$
Коэффициент запаса устойчивости	$q = \frac{h}{2\pi R} = \frac{H_T}{H_p} \frac{a}{R}$
Критерий Крускала-Шафранова	$q = \frac{aH_T}{RH_p} > 1$
Параметр $\beta$	$\beta = \frac{nkT}{(H^2/8\pi)}$
Скорость Альфвена	$v_A = H / \sqrt{4\pi\rho}$
Критерий Лоусона	$n\tau_e \geq 2 \cdot 10^{14} см^{-3}с$ (для DT реактора при $T > 5$ кэВ)
Закон дисперсии продольных волн в плазме	$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 c_{se}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - k^2 c_{si}^2} = 0,$
Тройное термоядерное произведение	$n\tau_e T \geq 3,5 \cdot 10^{20} м^{-3}с^{-1}кэВ$

Приложение 2

Примерные значения наиболее часто используемых величин

Физическая величина	Значение в СГС	Значение в СИ
Масса электрона	$9,8 \cdot 10^{-28} \text{ г}$	$9,8 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса протона	$1,67 \cdot 10^{-24} \text{ г}$	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Скорость света	$3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$	$3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Постоянная Больцмана	$1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К}$	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Энергия Ридберга	$2,2 \cdot 10^{-11} \text{ эрг (13,6 эВ)}$	$2,2 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$
Боровский радиус	$0,53 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 0,53 \text{ \AA}$	$0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Закон Кулона	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ [F]=дин, 1Н=10 <sup>5</sup> дин	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ [F]=Н
Элементарный заряд	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ [F]=дин, 1Н=10 <sup>5</sup> дин	[q]=Кл Заряд электрона e=1.6·10 <sup>-19</sup> Кл
Напряженность электрического поля	[q]=СГСЭ-ед.заряда 1Кл=3·10 <sup>9</sup> СГСЭ-ед.заряда	$E = F/q$ [E] =В/м
Электрический ток	$E = F/q$ [E]=СГСЭ ед. 1 СГСЭ ед.=3·10 <sup>4</sup> В/м	[I] = А
Напряженность магнитного поля	[I] =СГСЭ-ед.разряда 1А=3·10 <sup>9</sup> СГСЭ-ед.разряда	$H = I/(2R)$ [H]=А/м
Магнитная индукция	$H = 2\pi I/(cR)$ [H]=Э 1А/м=4π·10 <sup>-3</sup> Э	$B = \mu_0 \mu H$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ – магнитная постоянная, [B]=Тл

### Соотношения

$$1 \text{ эВ} \approx 11600 \text{ К} \approx 10^4 \text{ К}$$

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$$

$$= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$1 \text{ экв. А} = 6,25 \cdot 10^{18} \text{ 1/с}$$

$$1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гаусс}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 0,885 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}$$

Скорость протона при энергии 5 кэВ  $\approx 10^8 \text{ см/с}$

Сечение DT реакции в максимуме  $\sim 10^{-24} \text{ см}^2 = 1 \text{ барн}$

Скорость DT реакции при 10 кэВ

$$\langle \sigma v \rangle = 10^{22} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$$

Давление магнитного поля при 0,5 Тл  $P_m \approx 1 \text{ атм}$

*Сергей Константинович Жданов  
Валерий Александрович Курнаев  
Михаил Кириллович Романовский  
Игорь Владимирович Цветков*

## ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ И ПЛАЗМЕННЫХ УСТАНОВКАХ

*Учебное пособие*

Редактор Т.В. Волвенкова  
Компьютерная верстка А.В. Голубевой  
Верстка книги полностью соответствует предоставленному  
оригиналу-макету

Подписано в печать 15.11.07 Формат 60x84 1/16  
Печ.л. 23,0 Уч.-изд.л. 22,25 Изд. № 1/9  
Тираж 200 экз. Заказ № 0-620

Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет),  
115409, Москва, Каширское ш., 31.

Типография издательства “Тровант”,  
г. Троицк Московской области

